



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

## **Espectro de Fucik para un sistema acoplado**

### **TESIS**

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

### **AUTOR**

Santiago César ROJAS ROMERO

### **ASESOR**

Roxana LÓPEZ CRUZ

Lima, Perú

2017



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Rojas, S. (2017). *Espectro de Fucik para un sistema acoplado*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

214

98

## ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 10:10 horas del día viernes tres de febrero del dos mil diecisiete, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Renato Mario Benazic Tome e integrado por los siguientes miembros, Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini (Jurado Informante), Dr. José Raúl Luyo Sánchez (Jurado Informante), Mg. Tomás Alberto Núñez Lay (Jurado Evaluador) y la Dra. Roxana López Cruz como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «ESPECTRO DE FUCIK PARA UN SISTEMA ACOPLADO» presentada por el Bachiller Santiago César Rojas Romero, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura. ✓

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Santiago César Rojas Romero respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Santiago César Rojas Romero aprobado con el calificativo de ...1.8.....  
.....muy bueno.....

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del grado académico de **Magíster en Matemática Pura** al Bachiller Santiago César Rojas Romero.

Siendo las 11:30 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Renato Mario Benazic Tome  
**Presidente**

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini  
**Miembro**

Mg. Tomás Alberto Núñez Lay  
**Miembro**

Dr. José Raúl Luyo Sánchez  
**Miembro**

Dra. Roxana López Cruz  
**Miembro Asesor**

# ESPECTRO DE FUCIK PARA UN SISTEMA ACOPLADO

**Santiago César Rojas Romero**

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado académico de Magíster en Matemática Pura.

Aprobado por el siguiente Jurado:

Dr. Renato Mario Benazic Tomé



Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini



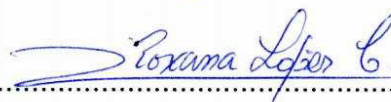
Dr. José Raul Luyo Sanchez



Mg. Tomás Nuñez Lay



Dra. Roxana López Cruz  
(Miembro Asesor)



Lima  
Febrero - 2017

## Ficha Catalográfica

Rojas Romero, Santiago César.

Espectro de Fucik para un sistema acoplado/ Santiago  
César Rojas Romero. Lima: UNMSM / Magister en  
Matemática Pura, 2017.

ix, 98p. il.

Tesis - Universidad Nacional Mayor de San Marcos,  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Unidad de Post Grado

A mis hijas Silvia y Bianca,  
A mi esposa Yolanda,  
A mis padres y hermanos  
y a mi mamita Victoria,  
quienes con su sonrisa, su amor,  
su compañía y su recuerdo,  
me alegran y llenan cada día.

## Agradecimientos

Agradezco a mi familia, mis hijas Silvia y Bianca y mi esposa Yolanda, por haberme permitido usar los momentos familiares y convertirlos en horas de trabajo de tesis. En especial, agradezco a Yolanda por ser constantemente mi apoyo, mi consejera y mi mayor crítica.

Agradezco a la profesora Roxana López Cruz por darme la libertad de elección del tema de tesis, por su buena orientación académica, por su apoyo para obtener algunos de los papers usados en el trabajo y, sobre todo, por su amistad.

Agradezco a mis padres y hermanos por estar siempre conmigo, por apoyarme en todo momento, por ser parte muy importante de mi vida y por su ejemplo de unidad familiar.

Finalmente, agradezco a todos los amigos por sus buenos augurios y confianza en mí.



## Resumen

En este trabajo estudiamos el Espectro de Fucik para el siguiente sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores en la frontera

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases}$$

donde  $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $w^+ = \max\{w, 0\}$ ,  $w^- = \max\{-w, 0\}$  y  $Bw = 0$  representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann.

Obtenemos familias explícitas de puntos  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$  del espectro de Fucik y construimos familias explícitas de soluciones no triviales  $(u, v)$  para el problema dado.

Demostramos que el espectro de Fucik está formado por superficies. Describimos explícitamente la parte trivial del espectro, correspondiente a soluciones que no cambian de signo, probando que para el problema Dirichlet está compuesto por un plano y un cilindro hiperbólico, y para el problema Neumann está compuesto por los tres planos coordenados. Luego, usando el Teorema de la Función Implícita, probamos la existencia de superficies en la parte no trivial del espectro, correspondiente a soluciones que cambian de signo.

## Abstract

In this work we study the Fucik Spectrum for the following coupled system of ordinary differential equations with boundary values

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{in } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{in } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{on } \{0, 1\}, \end{cases}$$

where  $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $w^+ = \max\{w, 0\}$ ,  $w^- = \max\{-w, 0\}$  and  $Bw = 0$  represents the Dirichlet or Neumann boundary conditions.

We get explicit families of points  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$  of the Fucik spectrum and we also construct explicit families of non trivial solutions  $(u, v)$  to the given problem.

We prove that Fucik spectrum consists of surfaces. We describe explicitly the trivial part of the spectrum, which corresponds to no changing sign solutions, by proving that for Dirichlet problem is composed of a plane and an hyperbolical cylinder, and for Neumann problem is composed of the three coordinate planes. Then, using the Implicit Function Theorem, we prove the existence of surfaces in the non trivial part of the spectrum, which corresponds to changing sign solutions.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Espacios de Sobolev . . . . .	5
1.1.1. Los espacios $L^p$ . . . . .	5
1.1.2. Los espacios $W^{k,p}$ . . . . .	6
1.1.3. Los espacios $W_0^{1,p}$ . . . . .	7
1.1.4. Resultados importantes de aproximación e Inmersiones de Sobolev . . . . .	8
1.2. Regularidad de las soluciones débiles . . . . .	9
1.3. Autovalores del Laplaciano . . . . .	10
1.3.1. Autovalores del Laplaciano en dimensión 1 . . . . .	11
1.3.2. Autovalores del sistema acoplado (3) . . . . .	12
1.4. Teoremas de la Función Inversa y de la Función Implícita . . . . .	14
<b>2. Descripción del espectro de Fucik escalar</b>	<b>16</b>
2.1. Espectro de Fucik escalar para el problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet . . . . .	17
2.2. Espectro de Fucik escalar para el problema con condiciones de frontera tipo Neumann . . . . .	26
<b>3. Espectro de Fucik para el sistema acoplado y soluciones que no cambian de signo</b>	<b>32</b>
3.1. Propiedades básicas de $\widehat{\Sigma}$ . . . . .	34
3.2. Algunas identidades importantes . . . . .	38
3.3. Soluciones que cambian o no de signo . . . . .	40

<b>4. Signo y número de ceros de las soluciones no triviales</b>	<b>49</b>
<b>5. Construcción de la parte no trivial del Espectro de Fucik</b>	<b>61</b>
5.1. Estudio local de $\tilde{\Sigma}^+$ . . . . .	64
5.2. Estudio global de $\tilde{\Sigma}^+$ . . . . .	72
<b>6. Intersecciones entre las superficies del espectro de Fucik del sistema acoplado</b>	<b>82</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>94</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>96</b>

# Introducción

El espectro de Fucik fue introducido por el matemático checoslovaco Svatopluk Fucik en sus trabajos sobre problemas tipo Dirichlet de segundo orden con no linealidades de salto, es decir problemas no lineales de la forma

$$\begin{cases} -u'' = f(u) + g(t) & \text{en } \langle 0, T \rangle, \\ u = 0 & \text{en } \{0, T\}, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  y  $g : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas y se verifica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \neq \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(t)}{t}.$$

En [13] Fucik definió el conjunto  $\Sigma$ , que ahora se conoce como el espectro de Fucik, como el conjunto de todos los pares  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathbb{R}^2$  para los cuales existe soluciones no triviales del problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, T \rangle, \\ u = 0 & \text{en } \{0, T\}, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $u^+ = \max\{u, 0\}$  y  $u^- = \max\{-u, 0\}$ . Se observa que  $\Sigma$  generaliza la noción del espectro usual formado por los autovalores de  $-\frac{d^2}{dt^2}$ , pues  $u = u^+ - u^-$  para todo  $u$ .

Actualmente, el conjunto  $\Sigma$  está completamente descrito y puede ser explícitamente calculado (por ejemplo ver Fucik y Kufner [15] y Drabek [9]). Se sabe que consta de curvas que pasan por los puntos  $(\lambda_k, \lambda_k)$  (donde  $\lambda_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , son los autovalores de  $-\frac{d^2}{dt^2}$ ). Fucik [13] demostró la existencia de solución para el problema (1) siempre que  $(\lambda^+, \lambda^-)$  se encuentre en alguna de las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - \Sigma$  que tenga intersección no nula con la diagonal. Este resultado mostró la importancia de conocer el espectro  $\Sigma$ .

Desde entonces, los trabajos para obtener resultados análogos al de Fucik se han desarrollado y generalizado en varias direcciones. Se han considerado diferentes tipos de condiciones de frontera como el tipo Neumann o los de tipo periódico (ver Dancer [5], Fabry [11], Fabry y Habets [12]). También se han considerado las condiciones Sturm-Liouville del tipo  $au(0) + bu'(0) = 0 = cu(T) + du'(T)$  (ver Dong [8], Rojas [26] y Rynne [28], [29]) y hay trabajos sobre algunas generalizaciones a operadores con derivadas parciales (por ejemplo ver De Figueiredo y Gossez [7], Gallouet y Kavian [16]), extendiendo naturalmente la noción de espectro de Fucik para estos casos.

Nosotros, en este trabajo estudiamos el espectro de Fucik para el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases} \quad (3)$$

donde  $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $w^+ = \max\{w, 0\}$ ,  $w^- = \max\{-w, 0\}$  y  $Bw = 0$  representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann. Este espectro es definido como el conjunto

$$\widehat{\Sigma} = \{(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda^+, \lambda^-, \mu^- \geq 0 \text{ y (3) tiene soluciones no triviales}\}.$$

Nos motivamos a realizar este estudio debido a uno de los problemas propuestos por Fucik [14], el cual pide describir el conjunto de todos los pares  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tales que el problema de valor frontera de cuarto orden

$$\begin{cases} u^{(iv)} = au^+ - bu^- & \text{en } \langle 0, \pi \rangle, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \\ u''(0) = u''(\pi) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

tenga solución no trivial. Para  $a > 0$  y  $b > 0$ , de inmediato se observa que si  $(u_0, v_0)$  es solución del sistema

$$\begin{cases} -u'' = \sqrt{a}v^+ - \frac{b}{\sqrt{a}}v^- & \text{en } \langle 0, \pi \rangle, \\ -v'' = \sqrt{a}u^+ - \sqrt{a}u^- & \text{en } \langle 0, \pi \rangle, \\ u = v = 0 & \text{en } \{0, \pi\}, \end{cases} \quad (5)$$

entonces  $v_0$  es solución del problema (4). Por tanto, es suficiente resolver el problema (5), el cual es un caso particular de (3).

El objetivo de este trabajo es obtener una descripción del espectro  $\widehat{\Sigma}$  y de las respectivas soluciones no triviales del problema (3). En el desarrollo del trabajo logramos el objetivo y como consecuencia obtenemos una descripción de los coeficientes escalares en el problema (5) para los cuales éste tiene solución no trivial y hemos resuelto el problema (4) propuesto por Fucik en [14].

Este trabajo está organizado en seis capítulos. En el capítulo 1 enunciamos las propiedades y resultados que usamos en todo el trabajo. Específicamente, hacemos una revisión de los Espacios de Sobolev y los resultados de inmersión de estos espacios; también presentamos un resumen de las principales propiedades de los autovalores del Laplaciano, destacando entre ellas una caracterización de su primer autovalor. Este capítulo preliminar termina con el enunciado del Teorema de la Función Implícita, el cual tiene un rol preponderante en el desarrollo del trabajo.

En el capítulo 2 resolvemos el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases} \quad (6)$$

donde  $u^+ = \max\{u, 0\}$ ,  $u^- = \max\{-u, 0\}$  y  $Bu = 0$  representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann, y presentamos en forma explícita sus respectivas soluciones no triviales para ambos casos. También, aquí obtenemos una descripción explícita del espectro de Fucik asociado a (6), al cual denotamos  $\Sigma_{escal}$ . Estos resultados permiten mostrar en el capítulo 3 la existencia de familias de soluciones no triviales para el sistema acoplado (3) y la existencia de conjuntos de puntos en su espectro de Fucik  $\widehat{\Sigma}$ .

En el capítulo 3 mostramos que el espectro  $\widehat{\Sigma}$  tiene dos partes bien distinguidas:  $\widehat{\Sigma}_t$ , la parte trivial, en la cual los puntos corresponden a soluciones que no cambian de signo y  $\widehat{\Sigma}_{nt}$ , la parte no trivial, cuyos puntos corresponden a soluciones que cambian de signo en el intervalo. Asimismo, damos una descripción completa de  $\widehat{\Sigma}_t$  y ponemos en evidencia familias de puntos en  $\widehat{\Sigma}_{nt}$ .

En el capítulo 4 demostramos algunas propiedades de las soluciones no triviales del sistema acoplado; principalmente probamos que las soluciones  $(u, v)$  están formadas por funciones que tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1, respectivamente, y que en el caso de tener ceros en el intervalo éstos no se repiten (ceros simples); más aún  $u$  y  $v$  tienen el mismo número de ceros.

El capítulo 5 está íntegramente dedicado al estudio de la parte no trivial del espectro. Usando el Teorema de la Función Implícita se demuestra la existencia de superficies  $\widehat{\Sigma}_k^\pm$  (superficies de Fucik) contenidas en  $\widehat{\Sigma}$ . Más aún, mostramos que por cualquier punto  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$ , con  $\lambda_k$  autovalor de  $-\frac{d^2}{dt^2}$  y  $k \geq 2$ , pasan exactamente dos superficies en  $\widehat{\Sigma}_{nt}$ , específicamente  $\widehat{\Sigma}_k^+$  y  $\widehat{\Sigma}_k^-$ . Aquí también mostramos que existe una biyección entre  $\Sigma_{escal}$  y un subconjunto de  $\widehat{\Sigma}$ .

Finalmente, en el capítulo 6 probamos que las superficies  $\widehat{\Sigma}_k^\pm$ , contenidas en  $\widehat{\Sigma}$  y correspondientes a soluciones no triviales con diferente número de ceros, no se intersecan entre sí. También probamos que estas superficies  $\widehat{\Sigma}_k^+$  y  $\widehat{\Sigma}_k^-$  coinciden para todo  $k \geq 2$  en el caso Neumann y para todo  $k$  par en el caso Dirichlet. Concluimos el trabajo exhibiendo una curva en la intersección de estas superficies para el caso en que las correspondientes soluciones no triviales de (3) tengan el mismo número de ceros.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados básicos que usaremos en el desarrollo del trabajo. Empezamos haciendo una revisión de los espacios  $L^p$  y los espacios Sobolev, sus propiedades fundamentales y los resultados de inmersión de estos espacios. Luego enunciamos las principales propiedades de los autovalores del Laplaciano; aquí incluimos una caracterización del primer autovalor y el cálculo de los autovalores de  $-\frac{d^2}{dt^2}$  y del sistema acoplado (3). Finalmente, enunciamos dos resultados fundamentales: el Teorema de la Función Inversa y el Teorema de la Función Implícita.

### 1.1. Espacios de Sobolev

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto con frontera  $\partial\Omega$ . La prueba de los resultados que enunciamos en esta sección se pueden ver en Adams [1], Brezis [2] y Evans [10].

#### 1.1.1. Los espacios $L^p$

Para  $p \in [1, +\infty)$ , sea

$$\bar{L}^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u|^p < +\infty\} \quad (1.1)$$

y definimos  $L^p(\Omega)$  como el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos en  $\bar{L}^p(\Omega)$  que coinciden en casi todo punto.  $L^p(\Omega)$  está dotado con la norma

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De otro lado, sea

$$\bar{L}^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } u \text{ es medible y } \exists C : |u| \leq C \text{ a.e.}\} \quad (1.2)$$

y definimos  $L^\infty(\Omega)$  como el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos en  $\bar{L}^\infty(\Omega)$  que coinciden en casi todo punto.  $L^\infty(\Omega)$  está dotado con la norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C : |u| \leq C \text{ a.e.}\}.$$

Se sabe que (Ver Brezis[1]):

- a)  $L^p(\Omega)$  es un espacio de Banach para  $p \in [1, +\infty]$ , más aún es un espacio de Hilbert para  $p = 2$  con el producto escalar

$$(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv.$$

- b)  $L^p(\Omega)$  es reflexivo y separable para  $p \in \langle 1, +\infty \rangle$  y su dual es  $L^q(\Omega)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , donde la dualidad es dada por  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv$ .
- c)  $L^1(\Omega)$  es separable, mientras que  $L^\infty(\Omega)$  no lo es. El dual de  $L^1(\Omega)$  es  $L^\infty(\Omega)$  mientras que el dual de  $L^\infty(\Omega)$  contiene estrictamente a  $L^1(\Omega)$ , por ello ninguno de estos dos espacios es reflexivo.

### 1.1.2. Los espacios $W^{k,p}$

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto,  $k \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq p \leq \infty$ . Definimos el espacio de Sobolev de orden  $k$  como

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) / \exists (v_\alpha) \in L^p(\Omega) \text{ tal que}$$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \phi, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ con } 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

donde  $k$  es el orden de derivación en el sentido débil o distribucional,  $p$  es el orden de integración y  $v_\alpha$  es la derivada distribucional de  $u$  denotada por  $D^\alpha u$ . Se prueba que  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio vectorial.

Ahora introducimos las siguientes aplicaciones  $\|\cdot\|_{k,p}$

Sea  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{k,p} = \begin{cases} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Así, para  $1 \leq p \leq \infty$  tenemos que  $\|\cdot\|_{k,p}$  es una norma en  $W^{k,p}(\Omega)$ .

Por otro lado, para  $1 \leq p < \infty$  definimos

$$\|u\|_{k,p}^* := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p \quad , \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega)$$

y tenemos que  $\|\cdot\|_{k,p}^*$  es también una norma en  $W^{k,p}(\Omega)$  tal que  $\|\cdot\|_{k,p}^*$  es equivalente a  $\|\cdot\|_{k,p}$ .

Usualmente denotaremos  $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ .

Como en el caso de los espacios  $L^p$ , también se tiene:

a)  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach para  $p \in [1, +\infty]$  y es un espacio de Hilbert para  $p = 2$  (que es el caso  $H^k$ ) con el producto escalar

$$(u, v)_{H^k} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

b)  $W^{k,p}(\Omega)$  es reflexivo y separable para  $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ , pero solo separable para  $p = 1$ .

### 1.1.3. Los espacios $W_0^{1,p}$

Definimos:

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}},$$

dotado con la norma  $\|\cdot\|_{1,p}$ . Así  $W_0^{1,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach con la norma  $\|\cdot\|_{1,p}$ .

Una propiedad importante de estos espacios es la desigualdad de Poincaré.

**Teorema 1.1** *Si  $\Omega$  es acotado, entonces existe una constante  $C$ , que solo depende de  $\Omega$ , tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Esto implica que en estos espacios  $\|\nabla u\|_{L^p}$  es una norma equivalente a la usual.

Finalmente, para estos espacios tenemos las mismas conclusiones referentes a reflexividad y separabilidad, y para el caso  $p = 2$ , donde el espacio es Hilbert y es usualmente denotado por  $H_0^1(\Omega)$ .

### 1.1.4. Resultados importantes de aproximación e Inmersiones de Sobolev

#### Aproximación por funciones regulares

**Teorema 1.2** *Siempre que  $\partial\Omega$  es  $C^1$ , dada una función  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  (respectivamente  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ) existe una sucesión  $\{u_n\} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  (respectivamente  $\{u_n\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ ) que converge a  $u$  en la norma  $W^{1,p}$ .*

#### Inmersiones

Definimos el espacio de Banach

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ \phi \in C^k(\overline{\Omega}) : \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|D^\beta \phi(x) - D^\beta \phi(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \text{ para } 0 \leq |\beta| \leq k \right\}$$

dotado con la norma

$$\|\phi\|_{C^{k,\alpha}} = \|\phi\|_{C^k} + \max_{0 \leq |\beta| \leq k} \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|D^\beta \phi(x) - D^\beta \phi(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Recordemos que:

- a)  $A \subseteq B$  con **inclusión continua**, si  $\exists C \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|u\|_B \leq C\|u\|_A$ .
- b)  $A \subseteq B$  con **inclusión compacta**, si dada  $u_n \rightharpoonup u$  en A, entonces existe una subsucesión (que denotaremos igual que la sucesión) tal que  $u_n \rightarrow u$  en B.

Ahora enunciamos el Teorema que engloba todos los casos de inmersión de los espacios de Sobolev.

**Teorema 1.3** *Considerando  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$  con  $\partial\Omega \in C^1$  o  $\Omega = \mathbb{R}^N$  o  $\mathbb{R}_+^N$ , se tiene las siguientes inmersiones:*

- i) Si  $\frac{m}{N} < \frac{1}{p}$ , sea  $p^* = \left(\frac{1}{p} - \frac{m}{N}\right)^{-1}$ , entonces  $W^{m,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ 
  - para todo  $q \in [p, p^*]$  con inclusión continua, si  $\Omega$  no es acotado,
  - para todo  $q \in [1, p^*]$  con inclusión continua y también compacta excepto para el caso límite  $q = p^*$ , si  $\Omega$  es acotado.
- ii) Si  $\frac{m}{N} = \frac{1}{p}$ , entonces  $W^{m,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ 
  - para todo  $q \in [p, +\infty)$  con inclusión continua, si  $\Omega$  no es acotado,
  - para todo  $q \in [1, +\infty)$  con inclusión continua y compacta, si  $\Omega$  es acotado.

iii) Si  $\frac{m}{N} > \frac{1}{p}$ , entonces  $W^{m,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$

- para todo  $q \in [p, +\infty]$  con inclusión continua, si  $\Omega$  no es acotado,
- para todo  $q \in [1, +\infty]$  con inclusión continua y compacta, si  $\Omega$  es acotado.

Más aún, si  $k$  y  $\alpha$  son, respectivamente, la parte entera y decimal de  $m - \frac{N}{p}$ , tenemos:

- Si  $\alpha \neq 0$  entonces  $W^{m,p}(\Omega) \subseteq C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  con inclusión continua (también compacta si  $\Omega$  es acotado),
- Si  $\alpha = 0$  entonces  $W^{m,p}(\Omega) \subseteq C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$  con inclusión continua (también compacta si  $\Omega$  es acotado).

## 1.2. Regularidad de las soluciones débiles

Consideremos el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^N$  con frontera  $\partial\Omega$  Lipschitz continua,  $Bu = u$  o  $Bu = \frac{\partial u}{\partial n}$ , y la función  $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  es Caratheodory, es decir satisface:

- a)  $f(\cdot, s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x, s)$  es medible para todo  $s \in \mathbb{R}$ , y
- b)  $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto f(x, s)$  es continua para casi todo  $x \in \Omega$ .

**Definición 1.1** Diremos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  es una solución clásica del problema (1.3) para el caso Neumann si  $u$  satisface puntualmente las ecuaciones en (1.3) con  $Bu = \frac{\partial u}{\partial n}$ . Análogamente, diremos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  es una solución clásica de (1.3) para el caso Dirichlet si  $u$  satisface puntualmente las ecuaciones en (1.3) con  $Bu = u$ .

**Definición 1.2** Diremos que  $u \in H^1(\Omega)$  es una solución débil de (1.3) para el caso Neumann si  $\forall v \in H^1(\Omega)$  satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u) v. \quad (1.4)$$

Análogamente, diremos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  es una solución débil de (1.3) para el caso Dirichlet si  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$  satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u) v . \quad (1.5)$$

Se sabe que toda solución clásica también es una solución débil y que en general el recíproco no es cierto. Con el siguiente resultado (Ver Evans [9] y Massa [22]) y algunas condiciones de regularidad en  $\Omega$  y  $f$ , se puede ver que una solución débil también es clásica.

**Lema 1.1** Sean  $\Omega$  de clase  $C^{m+2}$  para algún  $m = 0, 1, 2, \dots$  y  $h \in H^m(\Omega)$ . Si  $\bar{u} \in H^m(\Omega)$  es una solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x) & \text{en } \Omega , \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega , \end{cases}$$

donde  $Bu = \frac{\partial u}{\partial n}$  o  $Bu = 0$ , entonces  $\bar{u} \in H^{m+2}(\Omega)$  y

$$\|\bar{u}\|_{H^{m+2}} \leq C(\|\bar{u}\|_{L^2} + \|h\|_{H^m}) .$$

### 1.3. Autovalores del Laplaciano

En el estudio de los problemas de la forma (1.3) es importante considerar el espectro del operador  $-\Delta$ , es decir el conjunto  $\sigma \subseteq \mathbb{C}$  de todos los  $\lambda$  (**autovalores**) tales que existen soluciones no triviales (**autofunciones**) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega , \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega . \end{cases} \quad (1.6)$$

A continuación enunciamos algunas propiedades de estos autovalores, considerando solo el caso  $\Omega$  acotado, que es de nuestro interés (ver Evans [10]). Escribimos  $H$  para referirnos al espacio  $H^1(\Omega)$  o  $H_0^1(\Omega)$  según las condiciones de frontera de (1.6) son tipo Neumann o Dirichlet, respectivamente.

1. Los autovalores son todos números reales no negativos y forman un conjunto discreto no acotado superiormente.
2. Para cada autovalor  $\lambda$ , el conjunto de autofunciones correspondientes es un subespacio finito dimensional de  $H$ . La dimensión de este subespacio es la **multiplicidad** del autovalor  $\lambda$ . Además, los autovalores distintos tienen autofunciones ortogonales.

3. Existe un primer autovalor, es simple (es decir, su multiplicidad es 1) y su correspondiente autoespacio está compuesto por los múltiplos de una función estrictamente positiva. Usamos la convención para ordenar los autovalores en una sucesión no decreciente  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , repitiendo cada uno de ellos de acuerdo a su multiplicidad, y denotamos por  $\phi_k$  a un generador del correspondiente autoespacio, tomado de manera que  $\|\phi_k\|_{L^2} = 1$ . Notamos que para el problema tipo Neumann  $\lambda_1 = 0$  y  $\phi_1 = \text{constante}$ , mientras que para el problema tipo Dirichlet  $\lambda_1 > 0$ .
4. La sucesión de autofunciones  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una base ortogonal para el espacio  $H$ , es decir, cualquier  $u \in H$  puede escribirse de manera única como

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \phi_k \quad , \quad \text{con} \quad \{\alpha_k\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Más aún,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \phi_k \rangle_{L^2(\Omega)}^2$$

y

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, \phi_k \rangle_{L^2(\Omega)}^2.$$

5. El primer autovalor es caracterizado por

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H, u \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}. \quad (1.7)$$

### 1.3.1. Autovalores del Laplaciano en dimensión 1

Aquí calculamos los autovalores de  $-\frac{d^2}{dt^2}$  sobre  $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$ , es decir, los valores  $\lambda \in \mathbb{R}$  tales que existen soluciones no triviales para los problemas

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

y

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Empezamos determinando la solución general de la ecuación  $-u'' = \lambda u$  y obtenemos

$$u(t) = \begin{cases} C_1 \cos \sqrt{\lambda} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} t & \text{para } \lambda > 0, \\ C_1 t + C_2 & \text{para } \lambda = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t} & \text{para } \lambda < 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes.

De las posibilidades que se presentan en (1.10) y considerando las condiciones de frontera tipo Dirichlet ( $u(0) = u(1) = 0$ ), resulta que toda solución no trivial de (1.8) es de la forma

$$u(t) = C \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} t, \quad \lambda = k^2 \pi^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad C \neq 0. \quad (1.11)$$

Así, los autovalores son  $\lambda_k = k^2 \pi^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$  y las correspondientes autofunciones son  $u_k(t) = C \operatorname{sen} k \pi t$ . En particular, las autofunciones

$$\phi_k(t) = \sqrt{2} \operatorname{sen} k \pi t, \quad k \geq 1$$

verifican  $\|\phi_k\|_{L^2} = 1$ .

Análogamente, para el problema con condiciones de frontera tipo Neumann ( $u'(0) = u'(1) = 0$ ), de (1.10) llegamos a que toda solución no trivial de (1.9) es

$$u(t) = D \cos \sqrt{\lambda} t, \quad \lambda = (k-1)^2 \pi^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad D \neq 0. \quad (1.12)$$

Luego, los autovalores son  $\lambda_k = (k-1)^2 \pi^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$  y las autofunciones son  $u_k(t) = D \cos(k-1)\pi t$ . En particular, las autofunciones

$$\phi_1(t) = 1,$$

$$\phi_k(t) = \sqrt{2} \cos(k-1)\pi t, \quad k \geq 2$$

verifican  $\|\phi_k\|_{L^2} = 1$ .

### 1.3.2. Autovalores del sistema acoplado (3)

En esta sección calcularemos los valores propios del sistema (3), es decir, aquellos valores  $\lambda \in \mathbb{R}$  tales que existen soluciones no triviales para los problemas

$$\begin{cases} -u'' = \lambda v & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$



y

$$\begin{cases} -u'' = \lambda v & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Empezaremos resolviendo (1.13), el cual es equivalente a

$$\begin{cases} u^{(iv)} = \lambda^2 u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

Al calcular la solución general de la ecuación  $u^{(iv)} = \lambda^2 u$ , obtenemos  $u(t)$  igual a

$$\begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} t} + C_3 \cos(\sqrt{\lambda} t) + C_4 \sen(\sqrt{\lambda} t) & \text{si } \lambda > 0, \\ C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4 & \text{si } \lambda = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t} + C_3 \cos(\sqrt{-\lambda} t) + C_4 \sen(\sqrt{-\lambda} t) & \text{si } \lambda < 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

donde  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  son constantes.

De (1.15) y usando las condiciones de frontera  $u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0$ , resulta

$$u(t) = \begin{cases} C_4 \sen(\sqrt{\lambda} t), & \text{si } \lambda = k^2 \pi^2, \\ C_4 \sen(\sqrt{-\lambda} t), & \text{si } \lambda = -k^2 \pi^2. \end{cases}$$

Y como en (1.13) se verifica  $v = -\frac{1}{\lambda} u''$ , tenemos

$$v(t) = \begin{cases} C_4 \sen(\sqrt{\lambda} t), & \text{si } \lambda = k^2 \pi^2, \\ -C_4 \sen(\sqrt{-\lambda} t), & \text{si } \lambda = -k^2 \pi^2. \end{cases}$$

Con lo cual concluimos que los autovalores del sistema acoplado (3) con condiciones de frontera tipo Dirichlet son  $\lambda_k = k^2 \pi^2$  y  $-\lambda_k = -k^2 \pi^2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) con correspondientes autofunciones  $(u, v) = (\phi_k, \phi_k)$  y  $(u, v) = (\phi_k, -\phi_k)$ , respectivamente, donde las funciones  $\phi_k = C \sen k \pi t$  son las autofunciones de (1.8).

Finalmente, resolviendo (1.14) y procediendo similarmente al caso Dirichlet, se obtiene que los autovalores del sistema acoplado (3) con condiciones de frontera tipo Neumann son  $\lambda_k = (k-1)^2 \pi^2$  y  $-\lambda_k = -(k-1)^2 \pi^2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) con correspondientes autofunciones  $(u, v) = (\phi_k, \phi_k)$  y  $(u, v) = (\phi_k, -\phi_k)$ , respectivamente, con  $\phi_k = C \cos(k-1)\pi t$  autofunciones de (1.9).

## 1.4. Teoremas de la Función Inversa y de la Función Implícita

Aquí presentamos dos importantes resultados del cálculo avanzado: el Teorema de la Función Inversa y el Teorema de la Función Implícita para campos vectoriales. La prueba de estos Teoremas se puede ver en Spivak [30]. Usaremos el Teorema de la Función Implícita en la descripción de la parte no trivial  $\widehat{\Sigma}_{nt}$  del espectro de Fucik para el sistema acoplado (3).

**Teorema 1.4 (Función Inversa)** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^N$  un abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$  un campo vectorial de clase  $C^1$  (es decir, sus campos escalares componentes tienen gradiente continuo). Supongamos que existe  $a \in A$  tal que*

$$\det(J_f(a)) = \det \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_N f_1(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 f_N(a) & \dots & D_N f_N(a) \end{pmatrix} \neq 0$$

*Entonces existe una vecindad abierta  $U$  de  $a$  contenido en  $A$  tal que  $V := f(U)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^N$ ,  $f$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  de  $U$  sobre  $V$ , y para cada  $x \in U$  se verifica*

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_N f_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 f_N(x) & \dots & D_N f_N(x) \end{pmatrix}^{-1}.$$

*Además, si para  $k \in \mathbb{N}$  con  $k > 1$  se verifica que  $f$  es  $k$  veces derivable (respectivamente  $f$  es de clase  $C^k$ ) en  $a$ , entonces  $f^{-1}$  es  $k$  veces derivable (respectivamente  $f^{-1}$  es de clase  $C^k$ ) en  $f(a)$ .*

**Teorema 1.5 (Función Implícita)** *Sean  $G \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  un conjunto abierto y  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^M$  un campo vectorial de clase  $C^1$  (es decir, sus campos escalares componentes tienen gradiente continuo). Supongamos que existe  $(a, b) \in G$  tal que  $f(a, b) = 0$  y*

$$\det \begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(a, b) & \dots & D_{N+M} f_1(a, b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N+1} f_M(a, b) & \dots & D_{N+M} f_M(a, b) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Entonces existen una vecindad abierta  $\Omega$  de  $(a, b)$  contenido en  $G$ , una vecindad abierta  $U$  de  $a$  y una función  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^M$  de clase  $C^1$  tal que

$$\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}.$$

También se tiene que para todo  $x \in U$  se verifica:

$$\det \begin{pmatrix} D_{N+1}f_1(x, \varphi(x)) & \dots & D_{N+M}f_1(x, \varphi(x)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N+1}f_M(x, \varphi(x)) & \dots & D_{N+M}f_M(x, \varphi(x)) \end{pmatrix} \neq 0$$

y  $J_\varphi(x)$  es igual a

$$- \begin{pmatrix} D_{N+1}f_1(x, y) & \dots & D_{N+M}f_1(x, y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N+1}f_M(x, y) & \dots & D_{N+M}f_M(x, y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1f_1(x, y) & \dots & D_Nf_1(x, y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1f_M(x, y) & \dots & D_Nf_M(x, y) \end{pmatrix}$$

donde  $y = \varphi(x)$ .

Además, si para  $k \in \mathbb{N}$  con  $k > 1$  se verifica que  $f$  es  $k$  veces derivable (respectivamente  $f$  es de clase  $C^k$ ) en  $(a, b)$ , entonces  $\varphi$  es  $k$  veces derivable (respectivamente  $\varphi$  es de clase  $C^k$ ) en  $a$ .

## Capítulo 2

# Descripción del espectro de Fucik escalar

En este capítulo resolveremos el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $\lambda^+, \lambda^- \in \mathbb{R}$ ,  $u^+ = \max\{u, 0\}$ ,  $u^- = \max\{-u, 0\}$  y  $Bu = 0$  representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann. Las soluciones no triviales son obtenidas en un proceso de construcción de acuerdo al número de ceros que ellas tienen en el intervalo  $\langle 0, 1 \rangle$ . Al construir las soluciones no triviales también se obtienen los valores de los escalares  $\lambda^+$  y  $\lambda^-$  para los cuales existen estas soluciones; más aún, se deducen las ecuaciones que ellas verifican. Con esto obtenemos una descripción explícita del espectro de Fucik  $\Sigma_{escal}$  para el problema (2.1).

En todo lo que sigue del trabajo llamaremos  $H$  al espacio  $H^1(0, 1)$  o  $H_0^1(0, 1)$  según estudiemos el problema tipo Neumann o Dirichlet, respectivamente.

**Definición 2.1** Diremos que  $u \in C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1]$  es una solución clásica del problema (2.1) para el caso Neumann si  $u$  satisface puntualmente las ecuaciones en (2.1) con  $Bu = \frac{\partial u}{\partial t}$ . Análogamente, diremos que  $u \in C^2(0, 1) \cap C^0[0, 1]$  es una solución clásica de (2.1) para el caso Dirichlet si  $u$  satisface puntualmente las ecuaciones en (2.1) con  $Bu = u$ .

**Definición 2.2** Diremos que  $u \in H$  es una solución débil de (2.1) si  $\forall \phi \in H$  satisface

$$\int_0^1 u'(t)\phi'(t)dt = \lambda^+ \int_0^1 u^+(t)\phi(t)dt - \lambda^- \int_0^1 u^-(t)\phi(t)dt \quad .$$

Ahora probaremos que toda solución de (2.1) es clásica.

**Lema 2.1** *Las soluciones no triviales del problema (2.1) son soluciones clásicas.*

**Demostración.-** Sea  $u$  solución débil del problema (2.1). Entonces  $u \in H$  y el lado derecho de la ecuación,  $\lambda^+ u^+ - \lambda^- u^-$ , también resulta una función en  $H$ . Luego, por el Lema 1.1 concluimos que  $u \in H^3(0, 1)$ . Finalmente, de la inmersión  $H^3(0, 1) \subseteq C^2[0, 1]$ , tenemos que  $u$  es solución clásica. ■

A continuación describiremos el espectro de Fucik escalar  $\Sigma_{escal}$  asociado al problema (2.1).

## 2.1. Espectro de Fucik escalar para el problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet

Buscamos los pares  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathbb{R}^2$  tales que el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

tiene soluciones no triviales. Los cálculos se resumen en el siguiente resultado.

**Proposición 2.1** *El problema de valor frontera (2.2) tiene una solución clásica no trivial si y sólo si se verifica uno de los siguientes enunciados:*

- a)  $\lambda^+ = \pi^2$  ,  $\lambda^-$  arbitrario;
- b)  $\lambda^+$  arbitrario ,  $\lambda^- = \pi^2$  ;
- c)  $\lambda^+ > \pi^2$  ,  $\lambda^- > \pi^2$  ,  $\frac{\sqrt{\lambda^+} \sqrt{\lambda^-}}{\pi(\sqrt{\lambda^+} + \sqrt{\lambda^-})} \in \mathbb{N}$  ;
- d)  $\lambda^+ > \pi^2$  ,  $\lambda^- > \pi^2$  ,  $\frac{\sqrt{\lambda^+}(\sqrt{\lambda^-} - \pi)}{\pi(\sqrt{\lambda^+} + \sqrt{\lambda^-})} \in \mathbb{N}$  ;
- e)  $\lambda^+ > \pi^2$  ,  $\lambda^- > \pi^2$  ,  $\frac{\sqrt{\lambda^-}(\sqrt{\lambda^+} - \pi)}{\pi(\sqrt{\lambda^+} + \sqrt{\lambda^-})} \in \mathbb{N}$  .

**Demostración.-** Primero veremos que el PVI de segundo orden

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = 0, u'(0) = d_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

tiene solución clásica única. En efecto, sabemos que el PVI (2.3) es equivalente al PVI de primer orden

$$\begin{cases} v_1' = v_2 & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ v_2' = -\lambda^+ v_1^+ + \lambda^- v_1^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ v_1(0) = 0, \ v_2(0) = d_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Y por las desigualdades

$$\|v^+ - w^+\|_\infty \leq \|v - w\|_\infty \quad \text{y} \quad \|v^- - w^-\|_\infty \leq \|v - w\|_\infty,$$

tenemos que la función

$$F(t, v_1, v_2) = (v_2, -\lambda^+ v_1^+ + \lambda^- v_1^-)$$

verifica

$$\begin{aligned} \|F(t, v_1, v_2) - F(t, w_1, w_2)\|_1 &= \|(v_2 - w_2, -\lambda^+(v_1^+ - w_1^+) + \lambda^-(v_1^- - w_1^-))\|_1 \\ &\leq \|v_2 - w_2\|_\infty + |\lambda^+| \|v_1 - w_1\|_\infty + |\lambda^-| \|v_1 - w_1\|_\infty \\ &\leq K(\|v_1 - w_1\|_\infty + \|v_2 - w_2\|_\infty) \\ &= K \|(v_1, v_2) - (w_1, w_2)\|_1 \end{aligned}$$

donde  $K = \max\{1, |\lambda^+| + |\lambda^-|\}$ . Es decir  $F$  es Lipschitziana y, por el teorema de unicidad de solución de PVI (ver Coddington [4]), resulta que existe una única solución  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de (2.4). Luego,  $u = \varphi_1$  es la única solución de (2.3).

Ahora calculamos las soluciones clásicas no triviales de (2.2).

Denotamos  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  y  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^-$  como las soluciones del PVI (2.3) para los casos  $d_0 = 1$  y  $d_0 = -1$ , respectivamente. Así, la solución de (2.3) será  $u = d_0 \varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  si  $d_0 \geq 0$  o  $u = -d_0 \varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^-$  si  $d_0 < 0$ .

En el primer intervalo en el cual  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es positivo,  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u \\ u(0) = 0, \ u'(0) = 1. \end{cases}$$

Por lo visto en la sección 1.3 del capítulo 1, la solución general de la ecuación  $-u'' = \lambda^+ u$  tiene la forma

$$\begin{cases} C_1 \cos \sqrt{\lambda^+} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} t & \text{si } \lambda^+ > 0, \\ C_1 t + C_2 & \text{si } \lambda^+ = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda^+} t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda^+} t} & \text{si } \lambda^+ < 0. \end{cases}$$

De ahí, usando las condiciones iniciales, obtenemos

$$\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} t \quad , \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}\right]$$

(los casos  $\lambda^+ < 0$  y  $\lambda^+ = 0$  producen soluciones triviales). Como estamos construyendo soluciones clásicas y se verifica

$$\lim_{t \rightarrow (\frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}})^-} \left[ \varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+ \right]'(t) = -1 \quad ,$$

entonces, en el primer intervalo donde  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es negativa,  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^- u \\ u(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}) = 0, \quad u'(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}) = -1 \end{cases} .$$

Nuevamente, sabemos que la solución general de  $-u'' = \lambda^- u$  tiene la forma

$$\begin{cases} C_1 \cos \sqrt{\lambda^-} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} t & \text{si } \lambda^- > 0, \\ C_1 t + C_2 & \text{si } \lambda^- = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda^-} t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda^-} t} & \text{si } \lambda^- < 0. \end{cases}$$

De ahí, usando las condiciones iniciales  $u(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}) = 0, u'(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}) = -1$ , resulta

$$\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} (t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}) \quad , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right]$$

(los casos  $\lambda^- < 0$  y  $\lambda^- = 0$  quedan descartados porque nos dan las soluciones

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{-\lambda^-}} \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda^-} (t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}) & \text{si } \lambda^- < 0, \\ \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - t & \text{si } \lambda^- = 0, \end{cases}$$

las cuales son funciones decrecientes para  $t \geq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}$  y por tanto para ellas no es posible se verifique la condición de frontera en  $t = 1$  que es nuestro objetivo).

De esta manera, efectuando los cálculos correspondientes en los intervalos siguientes en los que  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es alternadamente positiva y negativa, y tal que es continua

con derivada continua, llegamos a que  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+(t)$  es igual a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} \right] \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{3\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Similarmente, obtenemos que  $\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^-(t)$  es igual a

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} \right] \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Luego, el problema (2.2) tiene soluciones clásicas no triviales si y sólo si

$$\varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+(1) = 0 \quad \text{o} \quad \varphi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^-(1) = 0 \quad .$$

A partir de esto probaremos que se satisfacen los enunciados a) – e) .

Sea  $u$  una solución no trivial de (2.2) sin ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$  . De (2.5) y (2.6) resulta

$$u(t) = \frac{A}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} t \quad \text{o} \quad u(t) = \frac{B}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} t$$

cuando  $u'(0) = A > 0$  o  $u'(0) = B < 0$  , respectivamente. Como  $u(1) = 0$  , tenemos  $\sqrt{\lambda^+} = k\pi$  o  $\sqrt{\lambda^-} = k\pi$  ,  $k \in \mathbb{N}$  , y al no haber ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$



deducimos

$$\sqrt{\lambda^+} = \pi \quad \text{o} \quad \sqrt{\lambda^-} = \pi \quad (2.7)$$

(de lo contrario tendríamos ceros de la forma  $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = \frac{1}{k} < 1$ , y ese no es el caso). De ahí que se verifican las condiciones a) o b).

Ahora, sea  $u$  solución no trivial de (2.2) con ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ . De (2.5) y (2.6) tenemos:

■ Si  $u'(0) = A > 0$  y  $u$  tiene  $(2k - 1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $u(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{A}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} \right] \\ -\frac{A}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{A}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{A}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \\ -\frac{A}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{(k-1)\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(k-1)\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \end{array} \right. \quad (2.8)$$

■ Si  $u'(0) = A > 0$  y  $u$  tiene  $2k$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $u(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{A}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} \right] \\ -\frac{A}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{A}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{A}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \\ \frac{A}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \end{array} \right. \quad (2.9)$$

- Si  $u'(0) = B < 0$  y  $u$  tiene  $(2k - 1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $u(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{B}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{B}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{B}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{B}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \\ -\frac{B}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{(k-1)\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{(k-1)\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

- Si  $u'(0) = B < 0$  y  $u$  tiene  $2k$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $u(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{B}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{B}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{B}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{B}{\sqrt{\lambda^+}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \\ \frac{B}{\sqrt{\lambda^-}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} - \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}}, \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda^-}} \right] \end{array} \right. \quad (2.11)$$

De (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) y por ser  $u(1) = 0$ , deducimos:

- i) Si  $u'(0) > 0$  o  $u'(0) < 0$  y  $u$  tiene  $(2k - 1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ ,

$$\frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1, \quad (2.12)$$

- ii) Si  $u'(0) > 0$  y  $u$  tiene  $2k$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ ,

$$\frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1, \quad y \quad (2.13)$$

iii) Si  $u'(0) < 0$  y  $u$  tiene  $2k$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ ,

$$\frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1. \quad (2.14)$$

Luego, si  $u$  tiene ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , se verifica (2.12), (2.13) o (2.14) para algún entero positivo  $k$ . Por tanto, se verifica alguna de las condiciones  $c)$ ,  $d)$  o  $e)$ .

Recíprocamente, si se verifica alguna de las condiciones  $a) - e)$ , podemos construir una solución clásica no trivial de (2.2), usando las funciones

$$\varphi_1 = A \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} (t - \xi), \quad A > 0, \quad \xi \text{ cero de } \varphi_1,$$

$$\varphi_2 = B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} (t - \omega), \quad B < 0, \quad \omega \text{ cero de } \varphi_2. \quad \blacksquare$$

Al demostrar la Proposición 2.1 también obtenemos una completa descripción de  $\Sigma_{\text{escal}}$  para el caso Dirichlet. Concretamente, de (2.7), (2.12), (2.13) y (2.14), tenemos

**Corolario 2.1** *El Espectro de Fucik  $\Sigma_{\text{escal}}$  para el problema (2.2), está formado por:*

$$\Sigma_1^+ = \{ (\lambda^+, \lambda^-) : \lambda^+ = \pi^2 \}, \quad (2.15)$$

$$\Sigma_1^- = \{ (\lambda^+, \lambda^-) : \lambda^- = \pi^2 \}, \quad (2.16)$$

$$\Sigma_{2k}^\pm = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-) : \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1 \right\}, \quad k \geq 1, \quad (2.17)$$

$$\Sigma_{2k+1}^+ = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-) : \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1 \right\}, \quad k \geq 1, \quad y \quad (2.18)$$

$$\Sigma_{2k+1}^- = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-) : \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1 \right\}, \quad k \geq 1, \quad (2.19)$$

donde la curva  $\Sigma_k^+$  (respectivamente  $\Sigma_k^-$ ) corresponde a las soluciones no triviales con  $(k-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$  y  $u'(0) > 0$  (respectivamente  $u'(0) < 0$ ).

Además, de (2.17)-(2.19) se observa que las curvas  $\Sigma_k^\pm$  pasan por los puntos  $(\lambda_k, \lambda_k)$  ( $\lambda_k = k^2\pi^2$  autovalor de (2.2)) y tomando límite cuando  $\lambda^+ \rightarrow \infty$  y  $\lambda^- \rightarrow \infty$ , respectivamente, encontramos que las asíntotas de estas curvas son

$$\lambda^- = \lambda_k \quad \text{para} \quad \Sigma_{2k-1}^-, \Sigma_{2k} \quad y \quad \Sigma_{2k+1}^+, \quad (2.20)$$

$$\lambda^+ = \lambda_k \quad \text{para} \quad \Sigma_{2k-1}^+, \Sigma_{2k} \quad y \quad \Sigma_{2k+1}^-. \quad (2.21)$$

**Observación 2.1** De (2.17)-(2.19) se deduce:

i) Si  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_k^+$  con  $k \geq 2$ , entonces

$$\lambda^- > \lambda_{\lfloor k/2 \rfloor} \quad y \quad \lambda^+ > \lambda_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$$

ii) Si  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_k^-$  con  $k \geq 2$ , entonces

$$\lambda^- > \lambda_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \quad y \quad \lambda^+ > \lambda_{\lfloor k/2 \rfloor}.$$

En efecto, para  $k = 2n$ , vemos que  $\lfloor k/2 \rfloor = n = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ . De (2.17) tenemos que si  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_k^\pm$ , resulta

$$\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^-}} < 1 \quad y \quad \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^+}} < 1.$$

Entonces  $\lambda^- > \lambda_n$  y  $\lambda^+ > \lambda_n$ . Por tanto, se verifican i) y ii) para  $k$  par.

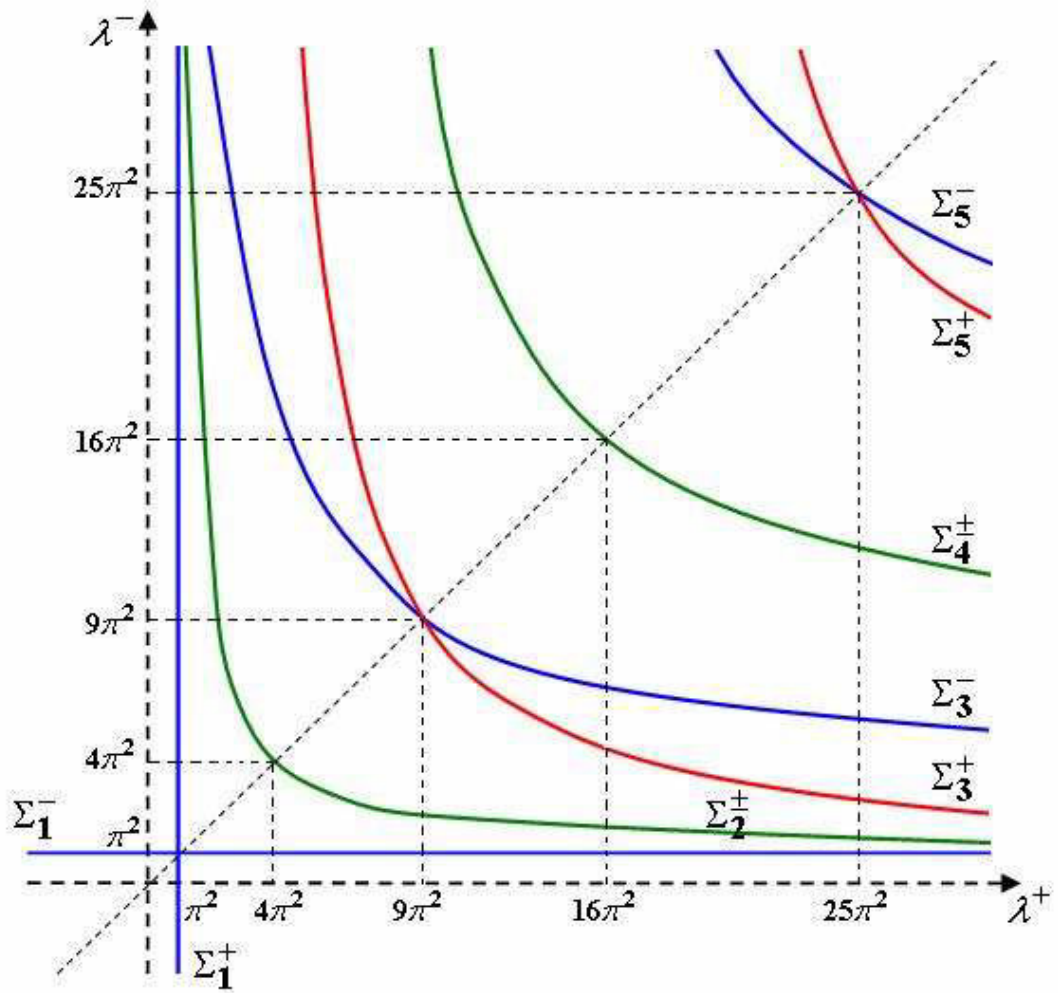
Ahora veamos el caso  $k = 2n - 1$ . Aquí  $\lfloor k/2 \rfloor = n - 1$  y  $\lfloor (k+1)/2 \rfloor = n$ . De (2.18) tenemos que si  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_k^+$ , entonces

$$\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{\lambda^-}} < 1 \quad y \quad \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^+}} < 1,$$

de donde  $\lambda^- > \lambda_{n-1} = \lambda_{\lfloor k/2 \rfloor}$  y  $\lambda^+ > \lambda_n = \lambda_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$ . Análogamente, de (2.19) tenemos que si  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_k^-$ , entonces

$$\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^-}} < 1 \quad y \quad \frac{(n-1)\pi}{\sqrt{\lambda^+}} < 1$$

y de ahí que  $\lambda^- > \lambda_n = \lambda_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$  y  $\lambda^+ > \lambda_{n-1} = \lambda_{\lfloor k/2 \rfloor}$ . Luego, i) y ii) también se verifican para  $k$  impar.



Espectro de Fucik  $\Sigma_{\text{escal}}$  : caso Dirichlet

## 2.2. Espectro de Fucik escalar para el problema con condiciones de frontera tipo Neumann

Aquí buscamos los pares  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathbb{R}^2$  tales que el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

tiene soluciones no triviales. Los cálculos se resumen en el siguiente resultado

**Proposición 2.2** *El problema de valor frontera (2.22) tiene una solución no trivial si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

- a)  $\lambda^+ = 0$  ,  $\lambda^-$  arbitrario;
- b)  $\lambda^+$  arbitrario ,  $\lambda^- = 0$  ;
- c)  $\lambda^+ > 0$  ,  $\lambda^- > 0$  ,  $\frac{2\sqrt{\lambda^+}\sqrt{\lambda^-}}{\pi(\sqrt{\lambda^+} + \sqrt{\lambda^-})} \in \mathbb{N}$  .

**Demostración.-** Análogamente al caso Dirichlet, se demuestra que el PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = n_0, u'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

tiene solución única y a partir de ella construiremos soluciones clásicas para (2.22).

Definimos  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  y  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^-$  como las soluciones del PVI (2.23) con  $n_0 = 1$  y  $n_0 = -1$ , respectivamente. Luego, la solución de (2.23) será  $u = n_0 \psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  si  $n_0 \geq 0$  o  $u = -n_0 \psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^-$  si  $n_0 < 0$ .

En el primer intervalo en el cual  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es positivo,  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}$$

y de ahí obtenemos

$$\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+(t) = \cos \sqrt{\lambda^+} t \quad , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} \right] .$$

Como se verifica

$$\lim_{t \rightarrow (\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}})^-} \left[ \psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+ \right]'(t) = -\sqrt{\lambda^+}$$

entonces, en el primer intervalo donde que  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es negativa,  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^- u \\ u\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}}\right) = 0, \quad u'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}}\right) = -\sqrt{\lambda^+} . \end{cases}$$

De ahí resulta

$$\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+(t) = -\frac{\sqrt{\lambda^+}}{\sqrt{\lambda^-}} \cos \sqrt{\lambda^-} \left(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle .$$

Así, efectuando los cálculos correspondientes en los intervalos siguientes donde  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+$  es alternadamente positiva y negativa, y tal que es continua y con derivada continua, llegamos a que  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+(t)$  es igual a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cos \sqrt{\lambda^+} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} \right] \\ -\frac{\sqrt{\lambda^+}}{\sqrt{\lambda^-}} \cos \sqrt{\lambda^-} \left(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle \\ \cos \sqrt{\lambda^+} \left(t - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle \\ -\frac{\sqrt{\lambda^+}}{\sqrt{\lambda^-}} \cos \sqrt{\lambda^-} \left(t - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle \\ \cos \sqrt{\lambda^+} \left(t - \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{5\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle \\ \vdots & \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Similarmente, obtenemos  $\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^-(t)$  igual a

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\cos \sqrt{\lambda^-} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \frac{\sqrt{\lambda^-}}{\sqrt{\lambda^+}} \cos \sqrt{\lambda^+} \left(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle \\ -\cos \sqrt{\lambda^-} \left(t - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle \\ \frac{\sqrt{\lambda^-}}{\sqrt{\lambda^+}} \cos \sqrt{\lambda^+} \left(t - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle \\ -\cos \sqrt{\lambda^-} \left(t - \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{5\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right\rangle \\ \vdots & \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Luego, el problema (2.22) tiene soluciones clásicas no triviales si y sólo si

$$(\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^+)'(1) = 0 \quad \text{o} \quad (\psi_{(\lambda^+, \lambda^-)}^-)'(1) = 0.$$

A partir de esto obtendremos las condiciones a) – c) .

Sea  $u$  una solución no trivial de (2.22) sin ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ . De (2.24) y (2.25) resulta

$$u(t) = A \cos \sqrt{\lambda^+} t \quad \text{o} \quad u(t) = B \cos \sqrt{\lambda^-} t$$

cuando  $u(0) = A > 0$  o  $u(0) = B < 0$ , respectivamente. Como  $u'(1) = 0$  tenemos

$$-A\sqrt{\lambda^+} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^+} = 0 \quad \text{o} \quad -B\sqrt{\lambda^-} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^-} = 0$$

de donde  $\sqrt{\lambda^+}$ ,  $\sqrt{\lambda^-} = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , y al no haber ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$  deducimos

$$\lambda^+ = 0 \quad \text{o} \quad \lambda^- = 0 \quad (2.26)$$

(de lo contrario habrían ceros de la forma  $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} = \frac{1}{2k} < 1$ ,  $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} = \frac{1}{2k} < 1$  y ese no es el caso).

Entonces, se verifican las condiciones a) o b) .

Ahora, sea  $u$  una solución no trivial de (2.22) con ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ . De (2.24) y (2.25) obtenemos:

■ Si  $u(0) = A > 0$  y  $u$  tiene  $(2n-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $u(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A \cos \sqrt{\lambda^+} t & , t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} \right] \\ -\frac{A\sqrt{\lambda^+}}{\sqrt{\lambda^-}} \cos \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ A \cos \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{A\sqrt{\lambda^+}}{\sqrt{\lambda^-}} \cos \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \\ -\frac{A\sqrt{\lambda^+}}{\sqrt{\lambda^-}} \cos \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(2n-2)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \end{array} \right. \quad (2.27)$$



- Si  $u(0) = A > 0$  y  $u$  tiene  $2n$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $u(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A \cos \sqrt{\lambda^+} t & , t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} \right] \\ -\frac{A\sqrt{\lambda^+}}{\sqrt{\lambda^-}} \cos \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ A \cos \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{A\sqrt{\lambda^+}}{\sqrt{\lambda^-}} \cos \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \\ A \cos \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \end{array} \right. \quad (2.28)$$

- Si  $u(0) = B < 0$  y  $u$  tiene  $(2n-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $u(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} B \cos \sqrt{\lambda^-} t & , t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{B\sqrt{\lambda^-}}{\sqrt{\lambda^+}} \cos \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ B \cos \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{B\sqrt{\lambda^-}}{\sqrt{\lambda^+}} \cos \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \\ -\frac{B\sqrt{\lambda^-}}{\sqrt{\lambda^+}} \cos \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{(2n-2)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \end{array} \right. \quad (2.29)$$

- Si  $u(0) = B < 0$  y  $u$  tiene  $2n$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $u(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} B \cos \sqrt{\lambda^-} t & , t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{B\sqrt{\lambda^-}}{\sqrt{\lambda^+}} \cos \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ B \cos \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ -\frac{B\sqrt{\lambda^-}}{\sqrt{\lambda^+}} \cos \sqrt{\lambda^+} \left( t - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{2\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{4\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \\ \vdots & \\ B \cos \sqrt{\lambda^-} \left( t - \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} - \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right) & , t \in \left\langle \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}, \frac{2n\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} \right] \end{array} \right. \quad (2.30)$$

De (2.27), (2.28), (2.29) y (2.30), deducimos que si  $u$  tiene  $k$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , el punto

$$\epsilon_k = \frac{k\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{2\sqrt{\lambda^-}}$$

es el último punto estacionario, es decir  $u'(\epsilon_k) = 0$ . Como  $u'(1) = 0$ , entonces

$$\frac{k\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{k\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} = 1. \quad (2.31)$$

Luego, si  $u$  tiene ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , se verifica la ecuación (2.31) para algún entero  $k > 0$ . Por tanto, tenemos la condición  $c)$ .

Recíprocamente, si se verifica alguna de las condiciones  $a) - c)$ , podemos construir una solución clásica no trivial de (2.22), usando las funciones

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \cos \sqrt{\lambda^+} (t - \xi), \quad A > 0, \quad \xi \text{ punto estacionario de } \psi_1, \\ \psi_2 &= B \cos \sqrt{\lambda^-} (t - \omega), \quad B < 0, \quad \omega \text{ punto estacionario de } \psi_2. \end{aligned}$$

■

Observamos que la demostración anterior nos da una completa descripción de  $\Sigma_{escal}$  para el caso Neumann; concretamente, de (2.26) y (2.31), tenemos:

**Corolario 2.2** *El Espectro de Fucik  $\Sigma_{escal}$  para el problema (2.22), está formado por:*

$$\Sigma_1^+ = \{ (\lambda^+, \lambda^-) : \lambda^+ = 0 \}, \quad (2.32)$$

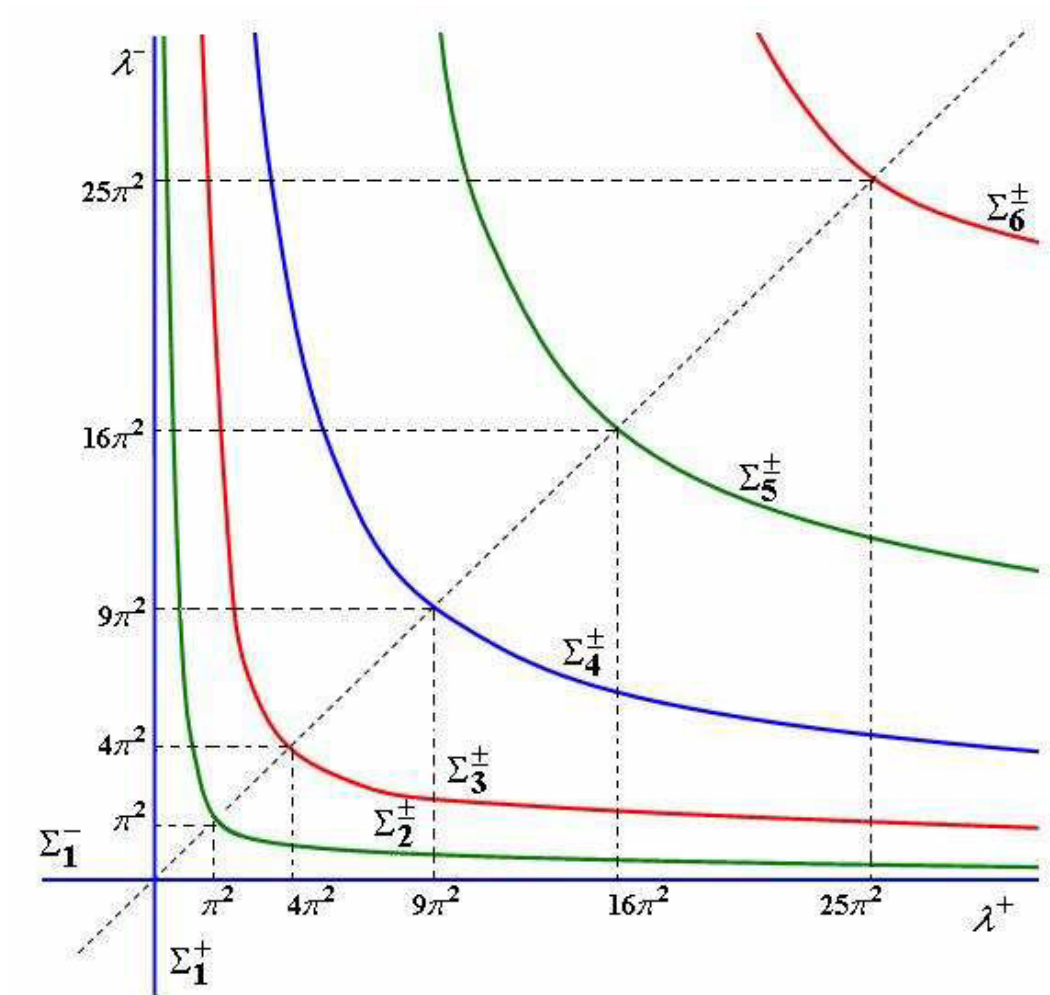
$$\Sigma_1^- = \{ (\lambda^+, \lambda^-) : \lambda^- = 0 \}, \quad y \quad (2.33)$$

$$\Sigma_k^\pm = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-) : \frac{(k-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(k-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} = 1 \right\}, \quad k \geq 2 \quad (2.34)$$

donde la rama  $\Sigma_k^+$  (respectivamente  $\Sigma_k^-$ ) corresponde a las soluciones no triviales de (2.22) con  $(k-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$  y  $u(0) > 0$  (respectivamente  $u(0) < 0$ ).

**Observación 2.2** *Las curvas  $\Sigma_k^\pm$  pasan por los puntos  $(\lambda_k, \lambda_k)$  ( $\lambda_k = (k-1)^2\pi^2$  autovalor de (2.22)). Además, de (2.34) se deduce: si  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_k^\pm$  con  $k \geq 2$ , entonces*

$$\lambda^- > \frac{1}{4}\lambda_k \quad y \quad \lambda^+ > \frac{1}{4}\lambda_k. \quad (2.35)$$



Espectro de Fucik  $\Sigma_{\text{escal}}$  : caso Neumann

## Capítulo 3

# Espectro de Fucik para el sistema acoplado y soluciones que no cambian de signo

En este capítulo empezamos el estudio del espectro de Fucik  $\widehat{\Sigma}$  para el sistema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $w^+ = \max\{w, 0\}$ ,  $w^- = \max\{-w, 0\}$  y  $Bw = 0$  representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann. Recordemos

$$\widehat{\Sigma} = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda^+, \lambda^-, \mu^- \geq 0 \text{ y } (3.1) \text{ tiene soluciones no triviales} \}.$$

El problema de la existencia de soluciones no triviales para el problema (3.1) queda resuelto con los siguientes resultados que demostraremos en este capítulo:

- 1° Si  $\lambda_1$  es el primer autovalor de (2.1) y  $\phi_1$  su correspondiente autofunción, entonces para todo  $\lambda^-, \mu^- \geq 0$ ,  $(\lambda_1, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$  y el par de funciones  $(\phi_1, \phi_1)$  es solución de (3.1).
- 2° Si  $\lambda_k$  y  $\phi_k$  son los autovalores y autofunciones del problema (2.1), respectivamente, entonces para todo  $k \geq 1$ ,  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$  y el par de funciones  $(\phi_k, \phi_k)$  es solución de (3.1).
- 3° Si  $\lambda_1$  es el primer autovalor de (2.1) y  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_{escal}$  (espectro de Fucik para el problema (2.1)) tal que  $\lambda^+, \lambda^- > \lambda_1$ , con correspondiente solución no trivial  $u$ , entonces  $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}$  y el par de funciones  $(u, u)$  es solución de (3.1).

Con estos resultados, y con todo lo visto en el capítulo anterior, obtenemos explícitamente numerosas familias de puntos en el espectro  $\widehat{\Sigma}$  y numerosas familias de soluciones para el problema (3.1).

Adicionalmente, en este capítulo damos una descripción explícita de la parte del espectro  $\widehat{\Sigma}$  correspondiente a las soluciones de (3.1) que no cambian de signo en el intervalo  $\langle 0, 1 \rangle$ . Mostraremos que en el caso Dirichlet, esta parte de  $\widehat{\Sigma}$  está formada por la unión de un plano y un cilindro hiperbólico, mientras que en el caso Neumann está formada por los planos cartesianos.

**Definición 3.1** Diremos que  $(u, v) \in (C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1]) \times (C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1])$  es solución clásica del problema (3.1) para el caso Neumann si satisface puntualmente las ecuaciones y condiciones en (3.1).

Análogamente, diremos que  $(u, v) \in (C^2(0, 1) \cap C^0[0, 1]) \times (C^2(0, 1) \cap C^0[0, 1])$  es solución clásica del problema (3.1) para el caso Dirichlet si satisface puntualmente las ecuaciones y condiciones en (3.1).

**Definición 3.2** Diremos que  $(u, v) \in H \times H$  es solución débil del problema (3.1) si para todo  $\phi, \psi \in H$

$$\int_{\Omega} u' \phi' + v' \psi' = \int_{\Omega} [\lambda^+ v^+ - \lambda^- v^-] \phi + [\lambda^+ u^+ - \mu^- u^-] \psi \quad . \quad (3.2)$$

A continuación demostramos que toda solución débil del problema (3.1) es también solución clásica.

**Lema 3.1** Las soluciones no triviales del problema (3.1) son soluciones clásicas.

**Demostración.-** Sea  $(u, v)$  solución débil del problema (3.1). Por definición,  $u, v \in H$ ; entonces los lados derechos de las ecuaciones en (3.1),  $(\lambda^+ v^+ - \lambda^- v^-)$  y  $(\lambda^+ u^+ - \mu^- u^-)$ , también están en  $H$ . Luego, por el Lema 1.1 tenemos que  $u, v \in H^3$ . De aquí, como la dimensión es  $N = 1$ , el Teorema 1.3 nos da que  $u, v \in C^2[0, 1]$ , y así  $(u, v)$  resulta ser una solución clásica. ■

**Observación 3.1** En todo lo que sigue del trabajo usaremos la expresión solución del problema (3.1) para referirnos a una solución clásica y, por el lema anterior, para los cálculos usaremos convenientemente cualquiera de las definiciones clásica o débil.

### 3.1. Propiedades básicas de $\widehat{\Sigma}$

Empezamos el estudio del espectro  $\widehat{\Sigma}$ , observando que es no vacío y tiene dos partes bien definidas: en una, los puntos corresponden a soluciones no triviales  $(u, v)$  que conservan su signo en todo el intervalo  $\langle 0, 1 \rangle$ ; y en la otra, los puntos corresponden a soluciones no triviales  $(u, v)$  que cambian de signo en dicho intervalo.

Presentamos dos ejemplos que muestran explícitamente la existencia de puntos en  $\widehat{\Sigma}$ .

**Ejemplo 3.1** Las funciones  $u(t) = -\sin \pi t$  y  $v(t) = -\frac{1}{3} \sin \pi t$  son negativas en todo el intervalo  $\langle 0, 1 \rangle$ , por ello  $u^+ = 0$ ,  $u^- = \sin \pi t$ ,  $v^+ = 0$  y  $v^- = \frac{1}{3} \sin \pi t$ . Entonces, el par de funciones  $(u, v)$  verifica

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - 3\pi^2 v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \frac{\pi^2}{3} u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

Luego, para todo  $\lambda^+ \geq 0$ , el punto  $(\lambda^+, 3\pi^2, \frac{\pi^2}{3}) \in \widehat{\Sigma}$  con correspondiente solución  $(u, v)$  de (3.1) para el caso Dirichlet.

**Ejemplo 3.2** Para la función

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cos 2\pi t & , \quad t \in [0, \frac{1}{4}] \\ -\cos \frac{2\pi}{3}(t-1) & , \quad t \in \langle \frac{1}{4}, 1 \rangle \end{cases}$$

tenemos

$$u^+(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cos 2\pi t & , \quad t \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0 & , \quad t \in \langle \frac{1}{4}, 1 \rangle \end{cases}$$

y

$$u^-(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \cos \frac{2\pi}{3}(t-1) & , \quad t \in \langle \frac{1}{4}, 1 \rangle. \end{cases}$$

Así,  $u$  verifica

$$\begin{cases} -u'' = 4\pi^2 u^+ - \frac{4\pi^2}{9} u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -u'' = 4\pi^2 u^+ - \frac{4\pi^2}{9} u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -u'' = 4\pi^2 u^+ - \frac{4\pi^2}{9} u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Por tanto, el punto  $(4\pi^2, \frac{4\pi^2}{9}, \frac{4\pi^2}{9}) \in \widehat{\Sigma}$  con correspondiente solución  $(u, u)$  de (3.1) para el caso Neumann.

**Definición 3.3** Llamaremos la parte trivial y la parte no trivial, respectivamente, del espectro de Fucik para el sistema (3.1), a los conjuntos

$$\widehat{\Sigma}_t = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda^+, \lambda^-, \mu^- \geq 0 \text{ y (3.1) tiene} \\ \text{soluciones no triviales que no cambian de signo} \} \text{ y}$$

$$\widehat{\Sigma}_{nt} = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda^+, \lambda^-, \mu^- > 0 \text{ y (3.1) tiene} \\ \text{soluciones no triviales que cambian de signo} \}.$$

Ambos conjuntos son disjuntos y no vacíos: el ejemplo 3.1 nos da una familia de puntos en  $\widehat{\Sigma}_t$  y el ejemplo 3.2 nos da un punto en  $\widehat{\Sigma}_{nt}$ . Las siguientes propiedades nos darán más puntos en  $\widehat{\Sigma}$ .

**Lema 3.2** Si  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$ , es autovalor de  $-\frac{d^2}{dt^2}$ , entonces:

1. El plano  $P = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \mid \lambda^+ = \lambda_1, \lambda^-, \mu^- \geq 0 \}$  está contenido en  $\widehat{\Sigma}_t$ .
2.  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$ , para todo  $k \geq 1$ .

**Demostración.-**

1. Para el caso Dirichlet tenemos  $\lambda_1 = \pi^2$  y su respectiva autofunción  $\phi_1 = \sin \pi t$ . Entonces  $\phi_1^+ = \phi_1$ ,  $\phi_1^- = 0$  y se verifica

$$\begin{cases} -\phi_1'' = \lambda_1 \phi_1^+ - \lambda^- \phi_1^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -\phi_1'' = \lambda_1 \phi_1^+ - \mu^- \phi_1^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ \phi_1(0) = \phi_1(1) = 0 \end{cases}.$$

Así,  $(\lambda_1, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$  con respectiva solución no trivial  $(\phi_1, \phi_1)$ . Como  $\phi_1$  no cambia de signo en  $\langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $(\lambda_1, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_t$  para todo  $\lambda^-, \mu^- \geq 0$ . El caso Neumann es análogo pues  $\lambda_1 = 0$  y  $\phi_1 = 1$ .

2. Sea  $\lambda_k$  un autovalor  $-\frac{d^2}{dt^2}$  ( $\lambda_k = k^2\pi^2$  para el caso Dirichlet,  $\lambda_k = (k-1)^2\pi^2$  para el caso Neumann) y  $\phi_k$  su respectiva autofunción. Es decir, se verifica

$$\begin{cases} -\phi_k'' = \lambda_k \phi_k & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ B\phi_k = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases}$$

donde  $B = 0$  representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann.

Entonces, como  $\phi_k = \phi_k^+ - \phi_k^-$ , se verifica

$$\begin{cases} -\phi_k'' = \lambda_k \phi_k^+ - \lambda_k \phi_k^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -\phi_k'' = \lambda_k \phi_k^+ - \lambda_k \phi_k^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ B\phi_k = B\phi_k = 0 & \text{en } \{0, 1\}. \end{cases} \quad (3.3)$$

y  $(\phi_k, \phi_k)$  es solución de (3.1). Luego,  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$ , para todo  $k \geq 1$ .

■

**Lema 3.3 (Simetrías en  $\widehat{\Sigma}$ )** Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con las correspondientes soluciones no triviales  $(u, v)$  de (3.1), entonces

1.  $(\lambda^+, \mu^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con correspondientes soluciones no triviales  $(v, u)$
2.  $(\sqrt{\lambda^+ \mu^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con correspondientes soluciones no triviales  $(-u, -\sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}} v)$ .

**Demostración.-**

1. Por hipótesis tenemos que  $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- > 0$  y

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases}$$

donde  $u$  y  $v$  cambian de signo. Entonces también se verifica

$$\begin{cases} -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bv = Bu = 0 & \text{en } \{0, 1\}. \end{cases}$$

Y de ahí que  $(\lambda^+, \mu^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con correspondientes soluciones no triviales  $(v, u)$  de (3.1).



2. Por hipótesis,  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  y

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases}$$

donde  $u$  y  $v$  cambian de signo. Como para todo  $\delta > 0$  se verifica

$$(\delta w)^+ = \delta w^+, \quad (\delta w)^- = \delta w^-, \quad (-\delta w)^+ = \delta w^- \quad \text{y} \quad (-\delta w)^- = \delta w^+,$$

entonces para todo  $\delta > 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} -u'' &= \left(\frac{\lambda^+}{\delta}\right)(\delta v^+) - \left(\frac{\lambda^-}{\delta}\right)(\delta v^-) \\ &= \left(\frac{\lambda^+}{\delta}\right)(-\delta v)^- - \left(\frac{\lambda^-}{\delta}\right)(-\delta v)^+ \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\delta v'' &= \delta \lambda^+ u^+ - \delta \mu^- u^- \\ &= (\delta \lambda^+)(-u)^- - (\delta \mu^-)(-u)^+ \quad . \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{cases} -(-u)'' = \left(\frac{\lambda^-}{\delta}\right)(-\delta v)^+ - \left(\frac{\lambda^+}{\delta}\right)(-\delta v)^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -(-\delta v)'' = (\delta \mu^-)(-u)^+ - (\delta \lambda^+)(-u)^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ B(-u) = B(-\delta v) = 0 & \text{en } \{0, 1\}. \end{cases}$$

Así, tomando  $\delta$  tal que  $\frac{\lambda^-}{\delta} = \delta \mu^-$  tenemos que  $(-u, -\delta v) = (-u, -\sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}} v)$  es solución de (3.1) con coeficientes

$$\left(\frac{\lambda^-}{\delta}, \frac{\lambda^+}{\delta}, \delta \lambda^+\right) = \left(\sqrt{\lambda^- \mu^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}\right).$$

Y al ser  $u$  y  $v$  funciones que cambian de signo, observamos que las funciones

$-u$  y  $-\sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}} v$  también cambian de signo. ■

**Observación 3.2** Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  y  $(u, v)$  es la correspondiente solución no trivial de (3.1), la primera simetría nos da que  $(\lambda^+, \mu^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con correspondiente solución  $(v, u)$  de (3.1). De ahí, usando la segunda simetría, tenemos que  $(\sqrt{\mu^- \lambda^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con solución  $(-v, -\sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}} u)$  de (3.1). Luego, si  $\lambda^+ = \sqrt{\lambda^- \mu^-}$ , para el mismo punto

$$(\sqrt{\mu^- \lambda^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}) = (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$$

hay dos soluciones no triviales de (3.1):  $(u, v)$  y  $(-v, -\sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}} u)$ .

## 3.2. Algunas identidades importantes

En esta subsección obtenemos las identidades que usaremos para describir algunas propiedades de las soluciones no triviales  $(u, v)$  de (3.1).

Empezamos multiplicando la primera ecuación de (3.1) por  $v$ , la segunda por  $u$  e integrando de 0 a 1, para obtener

$$\int_0^1 u'v' dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)^2 - (\lambda^+ + \lambda^-) \int_0^1 (v^+)(v^-) dt + \lambda^- \int_0^1 (v^-)^2 dt$$

y

$$\int_0^1 u'v' dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+)^2 - (\lambda^+ + \mu^-) \int_0^1 (u^+)(u^-) dt + \mu^- \int_0^1 (u^-)^2 dt,$$

pero como  $w^+w^- = 0$  para toda función  $w$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'v' dt &= \lambda^+ \int_0^1 (v^+)^2 + \lambda^- \int_0^1 (v^-)^2 dt \\ &= \lambda^+ \int_0^1 (u^+)^2 + \mu^- \int_0^1 (u^-)^2 dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ahora, multiplicando la primera ecuación de (3.1) por  $u$ , la segunda por  $v$  e integrando de 0 a 1, tenemos

$$\int_0^1 (u')^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)u dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)u dt \quad y \quad (3.5)$$

$$\int_0^1 (v')^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+)v dt - \mu^- \int_0^1 (u^-)v dt. \quad (3.6)$$

También, multiplicando la primera ecuación de (3.1) por  $u^+$  y  $u^-$ , e integrando de 0 a 1, obtenemos

$$\int_0^1 (u')(u^+)' dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^+) dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^+) dt$$

y

$$\int_0^1 (u')(u^-)' dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^-) dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^-) dt,$$

de donde

$$\int_0^1 |(u^+)'|^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^+) dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^+) dt \quad (3.7)$$

y

$$\int_0^1 |(u^-)'|^2 dt = -\lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^-) dt + \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^-) dt. \quad (3.8)$$

Procediendo análogamente con  $v^+$  y  $v^-$  en la segunda ecuación de (3.1), obtenemos

$$\int_0^1 |(v^+)'|^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+)(v^+) dt - \mu^- \int_0^1 (u^-)(v^+) dt \quad y \quad (3.9)$$

$$\int_0^1 |(v^-)'|^2 dt = -\lambda^+ \int_0^1 (u^+)(v^-) dt + \mu^- \int_0^1 (u^-)(v^-) dt . \quad (3.10)$$

De otro lado, para el problema tipo Neumann, multiplicando las dos ecuaciones de (3.1) por  $\phi_1 = 1$  e integrando de 0 a 1, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 u' \phi_1' dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+) \phi_1 dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-) \phi_1 dt \quad y \\ 0 &= \int_0^1 v' \phi_1' dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+) \phi_1 dt - \mu^- \int_0^1 (u^-) \phi_1 dt , \end{aligned}$$

de donde

$$\lambda^+ \int_0^1 v^+ dt = \lambda^- \int_0^1 v^- dt \quad y \quad \lambda^+ \int_0^1 u^+ dt = \mu^- \int_0^1 u^- dt . \quad (3.11)$$

Finalmente, para el problema tipo Dirichlet tenemos dos importantes identidades.

Multiplicamos ambas ecuaciones en (3.1) por  $\phi_1$  e integramos de 0 a 1, obteniendo

$$\begin{aligned} \lambda^+ \int_0^1 v^+ \phi_1 dt - \lambda^- \int_0^1 v^- \phi_1 dt &= \int_0^1 u' \phi_1' dt = - \int_0^1 u \phi_1'' dt = \lambda_1 \int_0^1 (u^+ - u^-) \phi_1 dt \\ \lambda^+ \int_0^1 u^+ \phi_1 dt - \mu^- \int_0^1 u^- \phi_1 dt &= \int_0^1 v' \phi_1' dt = - \int_0^1 v \phi_1'' dt = \lambda_1 \int_0^1 (v^+ - v^-) \phi_1 dt . \end{aligned}$$

Luego, sumamos y restamos estas dos últimas ecuaciones, llegando a

$$\begin{aligned} (\lambda^+ - \lambda_1) \int_0^1 v^+ \phi_1 dt + (\lambda^+ - \lambda_1) \int_0^1 u^+ \phi_1 dt \\ = (\lambda^- - \lambda_1) \int_0^1 v^- \phi_1 dt + (\mu^- - \lambda_1) \int_0^1 u^- \phi_1 dt \end{aligned} \quad (3.12)$$

y

$$\begin{aligned} (\lambda^+ + \lambda_1) \int_0^1 v^+ \phi_1 dt - (\lambda^+ + \lambda_1) \int_0^1 u^+ \phi_1 dt \\ = (\lambda^- + \lambda_1) \int_0^1 v^- \phi_1 dt - (\mu^- + \lambda_1) \int_0^1 u^- \phi_1 dt . \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3. Soluciones que cambian o no de signo

Aquí deducimos la naturaleza de las soluciones no triviales de (3.1) con o sin ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$  y condiciones para sus correspondientes coeficientes  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$ . En particular, describimos explícitamente  $\widehat{\Sigma}_t$ .

Primero consideramos el caso Dirichlet.

**Proposición 3.1** *Sea  $(u, v)$  una solución de (3.1) con condiciones de frontera tipo Dirichlet y coeficientes  $\lambda^+$ ,  $\lambda^-$  y  $\mu^-$ , entonces*

1. *Ambas  $u$  y  $v$  cambian de signo o ninguna de ellas.*
2. *Si ambas  $u$  y  $v$  cambian de signo, entonces todos los coeficientes son positivos. Más aún  $\lambda^+ > \lambda_1$  y  $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_1$ .*
3. *Si  $u$  y  $v$  no cambian de signo, entonces ambas son múltiplos no nulos de  $\phi_1$  y  $\lambda^+ = \lambda_1$  o  $\sqrt{\lambda^- \mu^-} = \lambda_1$ .*

**Demostración.-**

1. Basta probar que si una de las funciones no cambia de signo, entonces la otra función tampoco cambia de signo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $u \geq 0$  en  $[0, 1]$  y  $\lambda^+ \geq 0$ . De (3.10) tenemos que  $\int_0^1 |(v^-)'|^2 \leq 0$ . De ahí que  $(v^-)' = 0$  y  $v^- = k$  (constante). Luego,  $v^- = 0$  (pues el caso  $v^- = k > 0$ , usando (3.10), nos lleva a una contradicción). Por tanto  $v \geq 0$  en  $[0, 1]$ .

Análogamente se demuestra que si  $u < 0$  también  $v < 0$  en  $[0, 1]$ .

2. Sean  $u$  y  $v$  que cambian de signo. Primero probaremos que ninguno de los coeficientes puede ser cero. En efecto, si suponemos que  $\lambda^+ = 0$  y  $\lambda^- > 0$ . Entonces (3.7) nos da  $\int_0^1 |(u^+)'|^2 < 0$ , lo cual es una contradicción. En los otros casos se usa (3.8), (3.9) y (3.10).

La prueba de que todos los coeficientes son positivos, es inmediata. Si suponemos que  $\lambda^+ > 0$ , de (3.8) resulta  $\lambda^- > 0$  y de (3.10) tenemos  $\mu^- > 0$ .

Ahora probaremos  $\lambda^+ > \lambda_1$  y  $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_1$ .

Usando (3.7) y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\int_0^1 |(u^+)'|^2 dt < \lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^+) dt \leq \lambda^+ \|v^+\|_{L^2} \|u^+\|_{L^2}.$$

Como se verifica que  $u^+ \neq k\phi_1$ , pues  $u$  cambia de signo, por (1.7) también tenemos

$$\lambda_1 < \frac{\int_0^1 |(u^+)'|^2 dt}{\int_0^1 |u^+|^2 dt}.$$

Entonces, de las dos últimas desigualdades llegamos a

$$\lambda_1 \|u^+\|_{L^2}^2 < \|(u^+)' \|_{L^2}^2 < \lambda^+ \|v^+\|_{L^2} \|u^+\|_{L^2} . \quad (3.14)$$

Análogamente, de (3.8), (3.9) y (3.10), por la desigualdad de Hölder y al ser  $u^\pm \neq k\phi_1$ ,  $v^\pm \neq k\phi_1$ , tenemos

$$\lambda_1 \|u^-\|_{L^2}^2 < \|(u^-)' \|_{L^2}^2 < \lambda^- \|v^-\|_{L^2} \|u^-\|_{L^2} , \quad (3.15)$$

$$\lambda_1 \|v^+\|_{L^2}^2 < \|(v^+)' \|_{L^2}^2 < \lambda^+ \|u^+\|_{L^2} \|v^+\|_{L^2} , \quad (3.16)$$

$$\lambda_1 \|v^-\|_{L^2}^2 < \|(v^-)' \|_{L^2}^2 < \mu^- \|u^-\|_{L^2} \|v^-\|_{L^2} . \quad (3.17)$$

Multiplicando (3.14) con (3.16) y (3.15) con (3.17), luego de extraer raíz cuadrada a ambos productos, llegamos a

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|u^+\|_{L^2} \|v^+\|_{L^2} &< \lambda^+ \|u^+\|_{L^2} \|v^+\|_{L^2} \quad y \\ \lambda_1 \|u^-\|_{L^2} \|v^-\|_{L^2} &< \sqrt{\lambda^- \mu^-} \|u^-\|_{L^2} \|v^-\|_{L^2} , \end{aligned} \quad (3.18)$$

de donde  $\lambda_1 < \lambda^+$  y  $\lambda_1 < \sqrt{\lambda^- \mu^-}$ .

3. Sean  $u$  y  $v$  que no cambian de signo. Por la parte 1, solo debemos considerar los casos en que  $u$  y  $v$  tienen el mismo signo.

■ Caso  $u, v \geq 0$ :

De (3.5) y (3.6), tenemos que  $\lambda^+ > 0$ .

**Afirmación:**  $\lambda^+ = \lambda_1$ .

En efecto, de (3.12) tenemos

$$(\lambda^+ - \lambda_1) \underbrace{\left[ \int_0^1 v \phi_1 dt + \int_0^1 u \phi_1 dt \right]}_{>0} = 0 ,$$

y de ahí que  $\lambda^+ = \lambda_1$ . Luego, el sistema (3.1) queda como

$$\begin{cases} -u'' = \lambda_1 v & \text{en } \langle 0, 1 \rangle , \\ -v'' = \lambda_1 u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle , \\ u(0) = u(1) = 0, \quad v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} u^{(iv)} = \lambda_1^2 u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases}$$

cuya solución general es

$$u(t) = A e^{\sqrt{\lambda_1} t} + B e^{-\sqrt{\lambda_1} t} + C \cos(\sqrt{\lambda_1} t) + D \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1} t),$$

y por las condiciones de frontera, resulta  $u(t) = D \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1} t)$ . Finalmente, como  $v = -\frac{1}{\lambda_1} u''$ , tenemos  $u(t) = v(t) = D \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1} t)$ , es decir

$$u(t) = v(t) = D \phi_1, \quad D > 0.$$

- Caso  $u, v < 0$ : Por (3.8) y (3.10), tenemos que  $\lambda^- > 0$  y  $\mu^- > 0$ .

**Afirmación:**  $\lambda^- \mu^- = \lambda_1^2$ .

En efecto, de (3.12) y (3.13) tenemos

$$(\lambda^- - \lambda_1) \int_0^1 v \phi_1 dt + (\mu^- - \lambda_1) \int_0^1 u \phi_1 dt = 0,$$

$$(\lambda^- + \lambda_1) \int_0^1 v \phi_1 dt - (\mu^- + \lambda_1) \int_0^1 u \phi_1 dt = 0.$$

Sumando y restando estas ecuaciones, llegamos a

$$\lambda^- \int_0^1 v \phi_1 dt - \lambda_1 \int_0^1 u \phi_1 dt = 0,$$

$$-\lambda_1 \int_0^1 v \phi_1 dt + \mu^- \int_0^1 u \phi_1 dt = 0,$$

y de ahí, al ser  $\int_0^1 u \phi_1 dt \neq 0$  y  $\int_0^1 v \phi_1 dt \neq 0$ , se tiene la afirmación.

En este caso el sistema (3.1) queda

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^- v & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \mu^- u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = 0, \quad v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

y, por ser  $\lambda^- \mu^- = \lambda_1^2$ , equivale a

$$\begin{cases} u^{(iv)} = \lambda_1^2 u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

Resolviendo como se hizo en el ítem anterior, obtenemos

$$u = -k \phi_1 \quad \text{y} \quad v = -k \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}} \phi_1, \quad k > 0.$$

■

Ahora vemos el resultado correspondiente al caso Neumann.

**Proposición 3.2** *Sea  $(u, v)$  una solución de (3.1) con condiciones de frontera tipo Neumann y coeficientes  $\lambda^+$ ,  $\lambda^-$  y  $\mu^-$ , entonces*

1. *Ambas  $u$  y  $v$  cambian de signo o ninguna de ellas.*
2. *Si ambas  $u$  y  $v$  cambian de signo, entonces todos los coeficientes son positivos.*
3. *Si  $u$  y  $v$  no cambian de signo, entonces ambas son múltiplos de  $\phi_1$  (una de ellas puede ser cero) y al menos uno de los coeficientes es  $\lambda_1 = 0$ .*

**Demostración.-**

1. Sea  $u$  que no cambia de signo. Supongamos  $u \geq 0$ , esto es  $u^+ = u$  y  $u^- = 0$ . De (3.11) tenemos que  $\lambda^+ = 0$ . Luego, la segunda ecuación de (3.1) queda  $v'' = 0$  y por las condiciones de frontera resulta  $v$  constante, es decir  $v$  no cambia de signo.
2. Sean  $u$  y  $v$  que cambian de signo. Primero veamos que ningún coeficiente es cero. En efecto, si alguno de ellos fuera cero, digamos  $\lambda^+ = 0$ , entonces de (3.11) tendríamos  $\lambda^- = 0$  y  $\mu^- = 0$ . Luego en (3.1) quedarían  $u'' = 0$ ,  $v'' = 0$  y con las condiciones de frontera  $u$  y  $v$  resultarían constantes, pero no es el caso. Por lo tanto, ningún coeficiente es cero. Ahora, si uno de los coeficientes es positivo, de (3.11) se deduce inmediatamente que los otros también deben ser positivos.
3. Sean  $u$  y  $v$  que no cambian de signo. Considerando los diferentes casos para  $u, v$  y usando (3.11), el sistema (3.1) queda

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ v'' = 0 & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u'(0) = u'(1) = 0, & v'(0) = v'(1) = 0, \end{cases}$$

de donde resulta que  $u$  y  $v$  son constantes o alguno de ellos es 0. Así:

- i)  $\lambda^+ = 0$ , cuando  $u = k_1\phi_1$ ,  $k_1 \geq 0$  y  $v = k_2\phi_1$ ,  $k_2 \geq 0$ .
- ii)  $\lambda^- = 0$ , cuando  $u = 0$  y  $v = k\phi_1$ ,  $k < 0$ .
- iii)  $\mu^- = 0$ , cuando  $u = k\phi_1$ ,  $k < 0$  y  $v = 0$ . ■

Las Propositiones 3.1 y 3.2 nos dan una explícita descripción de la parte trivial  $\widehat{\Sigma}_t$  del espectro de Fucik del problema (3.1), y nos muestran que la parte no trivial  $\widehat{\Sigma}_{nt}$  está completamente incluida en una de las regiones acotadas por  $\widehat{\Sigma}_t$ . Así lo resaltamos en los siguientes resultados.

### Corolario 3.1

- *Para el caso Dirichlet*

$$\widehat{\Sigma}_t = \{ \lambda^+ = \lambda_1 \} \cup \{ \lambda^-, \mu^- > 0, \lambda^- \mu^- = \lambda_1^2 \}$$

donde el plano  $\{ \lambda^+ = \lambda_1 \}$  corresponde a la familia de soluciones  $u = v = k \phi_1$ ,  $k > 0$ , mientras que la superficie  $\{ \lambda^-, \mu^- > 0, \lambda^- \mu^- = \lambda_1^2 \}$  (cilindro hiperbólico) corresponde a la familia de soluciones  $u = \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}} v = -k \phi_1$ ,  $k > 0$ .

- *Para el caso Neumann*

$$\widehat{\Sigma}_t = \{ \lambda^+ = 0 \} \cup \{ \lambda^- = 0 \} \cup \{ \mu^- = 0 \}$$

donde el plano  $\{ \lambda^+ = 0 \}$  corresponde a las soluciones  $(u = k_1 \phi_1, v = k_2 \phi_1, k_1, k_2 \geq 0)$ , el plano  $\{ \lambda^- = 0 \}$  corresponde a las soluciones  $(u = 0, v = k \phi_1, k < 0)$  y el plano  $\{ \mu^- = 0 \}$  corresponde a las soluciones  $(u = k \phi_1, k < 0, v = 0)$ .

**Corolario 3.2** Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ , entonces  $\lambda^+ > \lambda_1$  y  $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_1$ .

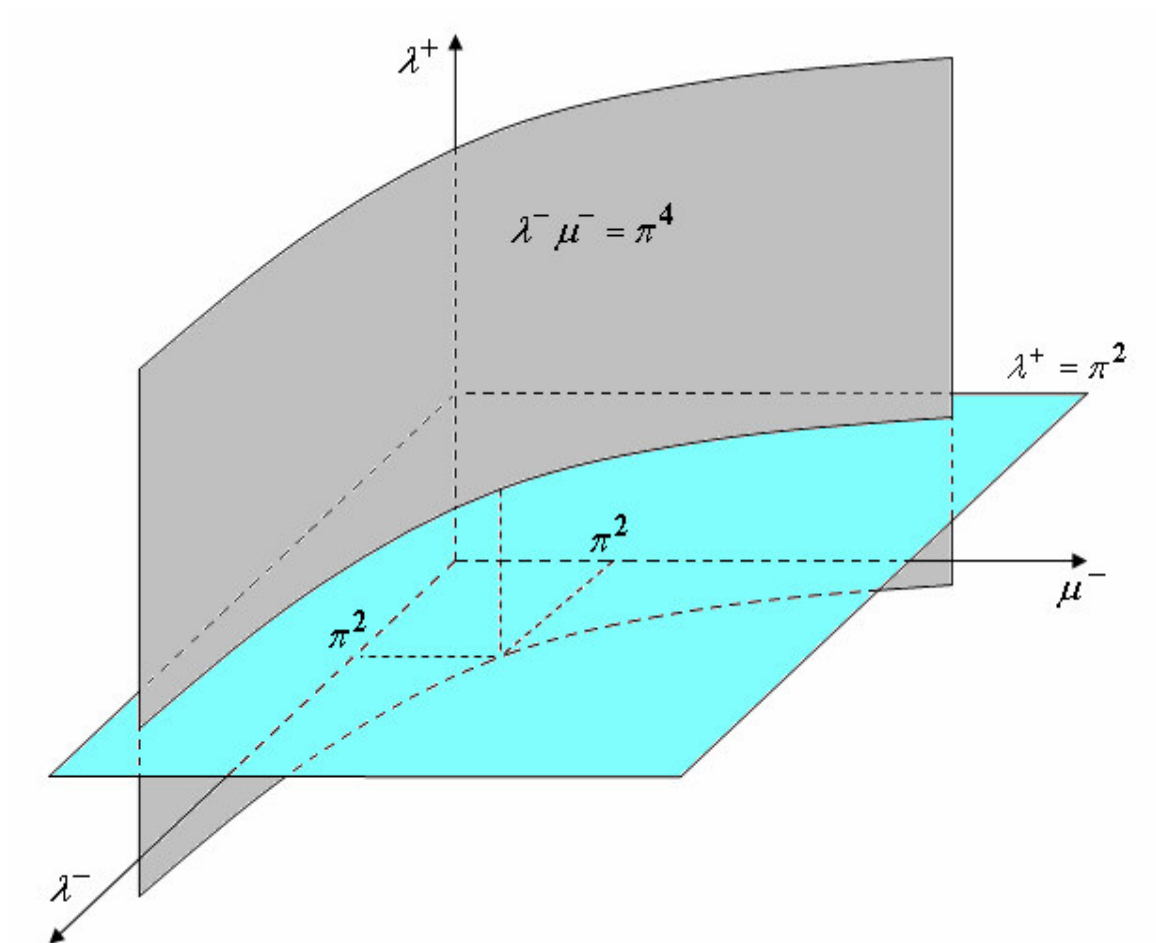
Terminamos este capítulo presentando un conjunto de puntos en  $\widehat{\Sigma}_{nt}$ , relacionado con el espectro de Fucik  $\Sigma_{escal}$  para el problema escalar.

**Lema 3.4** Si  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_{escal}$  con  $\lambda^+, \lambda^- > \lambda_1$ , entonces  $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ .

**Demostración.-** Sea  $u$  la solución no trivial para el problema escalar correspondiente a  $(\lambda^+, \lambda^-)$ . Entonces el par  $(u, u)$  satisface el problema (3.1) con coeficientes  $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-)$ . Más aún, como  $\lambda^+, \lambda^- > \lambda_1$ , por los Corolarios 2.1 y 2.2 sabemos que  $u$  tiene ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , es decir cambia de signo, y por ello  $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ .

■





$\hat{\Sigma}_t$  : caso Dirichlet

Debido al Lema 3.4 y por los Corolarios 2.1 y 2.2, tenemos el siguiente resultado

### Corolario 3.3

- Para el caso Dirichlet,  $\widehat{\Sigma}_{nt}$  contiene a las curvas

$$\widehat{C}_{2n}^{\pm} = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) : \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1 \right\}, \quad n \geq 1, \quad (3.19)$$

$$\widehat{C}_{2n+1}^+ = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) : \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1 \right\}, \quad n \geq 1, \quad (3.20)$$

$$\widehat{C}_{2n+1}^- = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) : \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\lambda^-}} = 1 \right\}, \quad n \geq 1, \quad (3.21)$$

donde la curva  $\widehat{C}_n^+$  (respectivamente  $\widehat{C}_n^-$ ) corresponde a las soluciones no triviales  $(u, u)$  de (3.1) con  $(n-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$  y  $u'(0) > 0$  (respectivamente  $u'(0) < 0$ ).

- Para el caso Neumann,  $\widehat{\Sigma}_{nt}$  contiene a las curvas:

$$\widehat{C}_n^{\pm} = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) : \frac{(n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^+}} + \frac{(n-1)\pi}{2\sqrt{\lambda^-}} = 1 \right\}, \quad n \geq 2 \quad (3.22)$$

donde la curva  $\widehat{C}_n^+$  (respectivamente  $\widehat{C}_n^-$ ) corresponde a las soluciones no triviales  $(u, u)$  de (3.1) con  $(n-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$  y  $u(0) > 0$  (respectivamente  $u(0) < 0$ ).

Ahora presentamos dos familias de puntos en  $\widehat{C}_2^+$ , una para cada caso: Dirichlet y Neumann, con sus respectivas familias de soluciones de (3.1).

**Ejemplo 3.3** Para  $r > 1$ , la función

$$u_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{r-1} \operatorname{sen} r\pi t & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{r}\right] \\ -\operatorname{sen} \frac{r\pi}{r-1} \left(t - \frac{1}{r}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{1}{r}, 1 \right] \end{cases}$$

verifica

$$u_r^+(t) = \begin{cases} \frac{1}{r-1} \operatorname{sen} r\pi t & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{r}\right] \\ 0 & , \quad t \in \left\langle \frac{1}{r}, 1 \right] \end{cases}$$

y

$$u_r^-(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{r}\right] \\ \text{sen} \frac{r\pi}{r-1} \left(t - \frac{1}{r}\right) & , \quad t \in \left\langle \frac{1}{r}, 1 \right] \end{cases} .$$

Así,  $u_r$  es solución del problema

$$\begin{cases} -u'' = r^2\pi^2 u^+ - \frac{r^2\pi^2}{(r-1)^2} u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Luego, por el Lema 3.4 y para todo  $r > 1$ , el punto  $\left(r^2\pi^2, \frac{r^2\pi^2}{(r-1)^2}, \frac{r^2\pi^2}{(r-1)^2}\right) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con correspondiente solución  $(u_r, u_r)$  de (3.1) para el caso Dirichlet; más aún,

$$\left(r^2\pi^2, \frac{r^2\pi^2}{(r-1)^2}, \frac{r^2\pi^2}{(r-1)^2}\right) \in \widehat{C}_2^+ .$$

**Ejemplo 3.4** Para  $r > \frac{1}{2}$ , la función

$$v_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2r-1} \cos r\pi t & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{2r}\right] \\ -\cos \frac{r\pi}{2r-1} (t-1) & , \quad t \in \left\langle \frac{1}{2r}, 1 \right] \end{cases}$$

verifica

$$v_r^+(t) = \begin{cases} \frac{1}{2r-1} \cos r\pi t & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{2r}\right] \\ 0 & , \quad t \in \left\langle \frac{1}{2r}, 1 \right] \end{cases}$$

y

$$v_r^-(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{2r}\right] \\ \cos \frac{r\pi}{2r-1} (t-1) & , \quad t \in \left\langle \frac{1}{2r}, 1 \right] \end{cases} .$$

Con esto,  $v_r$  es solución del problema

$$\begin{cases} -u'' = r^2\pi^2 u^+ - \frac{r^2\pi^2}{(2r-1)^2} u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

y por el Lema 3.4, y para todo  $r > \frac{1}{2}$ , el punto  $\left(r^2\pi^2, \frac{r^2\pi^2}{(2r-1)^2}, \frac{r^2\pi^2}{(2r-1)^2}\right) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con correspondiente solución  $(v_r, v_r)$  de (3.1) para el caso Neumann; más aún,

$$\left(r^2\pi^2, \frac{r^2\pi^2}{(2r-1)^2}, \frac{r^2\pi^2}{(2r-1)^2}\right) \in \widehat{C}_2^+ .$$

**Observación 3.3** *Los ejemplos 3.3 y 3.4 se pueden generalizar. Para  $N \geq 1$  :*

i) Si  $r > N$ ,  $\left( \frac{r^2\pi^2}{N^2}, \frac{r^2\pi^2}{(r-N)^2}, \frac{r^2\pi^2}{(r-N)^2} \right) \in \widehat{C}_2^+$  (caso Dirichlet) y la solución de (3.1) es  $(u_r, u_r)$ , donde

$$u_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{r-N} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{N} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{N}{r} \right] \\ -\frac{1}{N} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{r-N} \left( t - \frac{N}{r} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{N}{r}, 1 \right] . \end{cases}$$

ii) Si  $r > \frac{N}{2}$ ,  $\left( \frac{r^2\pi^2}{N^2}, \frac{r^2\pi^2}{(2r-N)^2}, \frac{r^2\pi^2}{(2r-N)^2} \right) \in \widehat{C}_2^+$  (caso Neumann) y la solución de (3.1) es  $(v_r, v_r)$ , donde

$$v_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2r-N} \cos \frac{r\pi}{N} t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{N}{2r} \right] \\ -\frac{1}{N} \cos \frac{r\pi}{2r-N} (t-1) & , \quad t \in \left\langle \frac{N}{2r}, 1 \right] . \end{cases}$$

## Capítulo 4

# Signo y número de ceros de las soluciones no triviales

En este capítulo demostraremos algunas propiedades de las funciones componentes de las soluciones no triviales del sistema (3.1). Específicamente, probaremos que si  $(u, v)$  es una solución no trivial de (3.1), entonces ambas  $u$  y  $v$  tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1, y en caso de tener ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$  éstos ceros no se repiten, son ceros simples; más aún,  $u$  y  $v$  tienen el mismo número de ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ .

El siguiente resultado es fundamental para llegar a las propiedades mencionadas.

**Lema 4.1** *Sean  $c, d \in L^\infty(0, 1)$  con  $c$  y  $d$  positivos en casi todo punto, y  $(u, v)$  una solución clásica no trivial del problema acoplado de valor frontera*

$$\begin{cases} -u'' = c(x)v & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = d(x)u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}. \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $Bw = 0$  es la condición de frontera tipo Dirichlet o Neumann. Entonces para ningún punto  $x^* \in [0, 1]$  se cumplen las siguientes desigualdades:

$$u(x^*) \geq 0, \quad u'(x^*) \geq 0, \quad v(x^*) \leq 0, \quad v'(x^*) \leq 0, \quad (4.2)$$

$$u(x^*) \geq 0, \quad u'(x^*) \leq 0, \quad v(x^*) \leq 0, \quad v'(x^*) \geq 0, \quad (4.3)$$

$$u(x^*) \leq 0, \quad u'(x^*) \leq 0, \quad v(x^*) \geq 0, \quad v'(x^*) \geq 0, \quad (4.4)$$

$$u(x^*) \leq 0, \quad u'(x^*) \geq 0, \quad v(x^*) \geq 0, \quad v'(x^*) \leq 0. \quad (4.5)$$

Además:

- Para  $\bar{x} \in [0, 1]$ ,

(A1) si  $u(\bar{x}) = 0$  (o  $v(\bar{x}) = 0$ ) entonces  $u'(\bar{x})v'(\bar{x}) > 0$ ,

(A2) si  $u'(\bar{x}) = 0$  (o  $v'(\bar{x}) = 0$ ) entonces  $u(\bar{x})v(\bar{x}) > 0$ ;

- Para  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ,  $x_1 < x_2$ ,

(B1) si  $u'(x_1) = u'(x_2) = 0$  y  $u'(x) \neq 0$  para  $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$  entonces  $u(x_1)u(x_2) < 0$ , y lo mismo ocurre para  $v$ ;

(B2) si  $u(x_1) = u(x_2) = 0$  y  $u(x) \neq 0$  para  $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$  entonces  $u'(x_1)u'(x_2) < 0$ , y lo mismo ocurre para  $v$ .

**Demostración.-** Como el lema contiene varias partes, la prueba se hará en varias etapas. Sea  $(u, v)$  una solución no trivial de (4.1).

1° Observamos que en ningún punto  $x^* \in [0, 1]$  se cumple

$$u(x^*) = u'(x^*) = v(x^*) = v'(x^*) = 0. \quad (4.6)$$

En efecto, si en algún punto  $x^* \in [0, 1]$  tuviéramos (4.6), entonces la única solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = c(x)v & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = d(x)u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(x^*) = v(x^*) = u'(x^*) = v'(x^*) = 0 \end{cases}$$

sería  $u = v \equiv 0$ , pero este no es el caso.

2° Demostraremos la primera parte del lema, es decir veremos que en ningún punto  $x^* \in [0, 1]$  se verifican las desigualdades (4.2)-(4.5). Para ello usaremos algunas identidades que deducimos a continuación.

Sean  $x, x_0 \in [0, 1]$ . Integrando de  $x_0$  a  $x$  las ecuaciones en (4.1), obtenemos

$$u'(x) = u'(x_0) - \int_{x_0}^x c(\xi_1)v(\xi_1) d\xi_1, \quad (4.7)$$

$$v'(x) = v'(x_0) - \int_{x_0}^x d(\xi_1)u(\xi_1) d\xi_1. \quad (4.8)$$

Y volviendo a integrar de  $x_0$  a  $x$ , tenemos

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} c(\xi_2)v(\xi_2) d\xi_2, \quad (4.9)$$

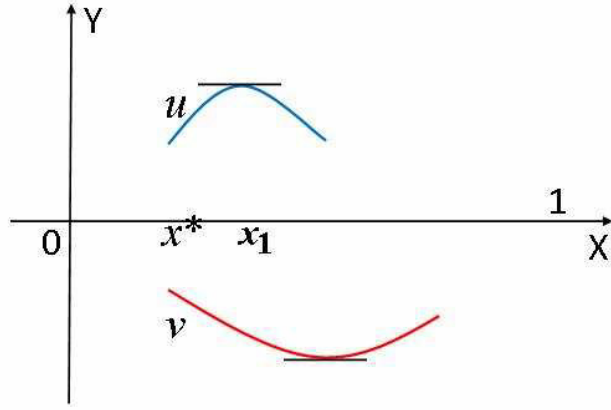
$$v(x) = v(x_0) + v'(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} d(\xi_2)u(\xi_2) d\xi_2. \quad (4.10)$$

Afirmamos:

- 1) Para ningún  $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$  se verifica (4.2) con todas las desigualdades estrictas. Procediendo por contradicción, suponemos que para algún  $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$  se verifican las desigualdades

$$u(x^*) > 0, \quad u'(x^*) > 0, \quad v(x^*) < 0, \quad v'(x^*) < 0. \quad (4.11)$$

Entonces  $u'(x) \neq 0$  y  $v'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \langle x^*, 1 \rangle$ . En efecto, si esto no ocurre, tomamos  $x_1 > x^*$  como el primer punto donde  $u'(x_1) = 0$  o  $v'(x_1) = 0$ ; gráficamente tenemos



y observamos que en el intervalo  $\langle x^*, x_1 \rangle$  ambas funciones  $u$  y  $v$  conservan su signo. Luego, como  $c(x), d(x) > 0$ , de (4.7) y (4.8) tendríamos

$$u'(x_1) = \underbrace{u'(x^*)}_{>0} - \int_{x^*}^{x_1} \underbrace{c(\xi_1)v(\xi_1)}_{<0} d\xi_1 > 0 \quad \text{y}$$

$$v'(x_1) = \underbrace{v'(x^*)}_{<0} - \int_{x^*}^{x_1} \underbrace{d(\xi_1)u(\xi_1)}_{>0} d\xi_1 < 0,$$

lo cual contradice lo supuesto. Entonces  $u'(x) \neq 0$  y  $v'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \langle x^*, 1 \rangle$ , más aún, teniendo en cuenta (4.11) llegamos a que  $u'(x) > 0$  y  $v'(x) < 0$  para todo  $x \in \langle x^*, 1 \rangle$ , lo cual nos da que  $u$  es estrictamente creciente y  $v$  es estrictamente decreciente en  $\langle x^*, 1 \rangle$ . Así  $u$  y  $v$  no podrían satisfacer las condiciones de frontera en 1, lo cual es una contradicción.

2) Para ningún  $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$  se verifica (4.3) con todas las desigualdades estrictas. El argumento de la prueba es similar al caso anterior. Procediendo por contradicción, suponemos existe  $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$  para el cual se verifican

$$u(x^*) > 0, \quad u'(x^*) < 0, \quad v(x^*) < 0, \quad v'(x^*) > 0. \quad (4.12)$$

Entonces  $u'(x) \neq 0$  y  $v'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \langle 0, x^* \rangle$ . Pues, si ocurriera lo contrario, elegiríamos  $x_2 < x^*$  como el mayor punto tal que  $u'(x_2) = 0$  o  $v'(x_2) = 0$ . Así  $u$  y  $v$  mantendrían su signo en el intervalo  $[x_2, x^*]$ . Y al ser  $c(x), d(x) > 0$ , de (4.7) y (4.8), tendríamos

$$\begin{aligned} u'(x_2) &= \underbrace{u'(x^*)}_{<0} + \int_{x_2}^{x^*} \underbrace{c(\xi_1)v(\xi_1)}_{<0} d\xi_1 < 0 \quad \text{y} \\ v'(x_2) &= \underbrace{v'(x^*)}_{>0} + \int_{x_2}^{x^*} \underbrace{d(\xi_1)u(\xi_1)}_{>0} d\xi_1 > 0, \end{aligned}$$

lo cual contradice lo supuesto. Luego  $u'(x) \neq 0$  y  $v'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \langle 0, x^* \rangle$ , más aún  $u'(x) < 0$  y  $v'(x) > 0$  para todo  $x \in \langle 0, x^* \rangle$ , es decir,  $u$  es estrictamente decreciente y  $v$  es estrictamente creciente en  $\langle 0, x^* \rangle$ . Por tanto  $u$  y  $v$  no podrían satisfacer las condiciones de frontera en 0, y esto es una contradicción.

3) Para ningún  $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$  se verifica (4.2) con sólo una desigualdad estricta. La prueba se hará por contradicción, pero antes observamos lo siguiente:

3i) Si  $u(x^*) = 0$ , tenemos

$$u'(x^*) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x^* + h)}{h}.$$

Entonces  $u$  y  $u'$  tienen el mismo signo en una vecindad a derecha de  $x^*$ . Análogamente, si  $v(x^*) = 0$  nos da que  $v$  y  $v'$  tienen el mismo signo en una vecindad a derecha de  $x^*$ .

3ii) Si  $u'(x^*) = 0$ , por (4.7) tenemos

$$u'(x) = \underbrace{u'(x^*)}_{=0} - \int_{x^*}^x c(\xi_1)v(\xi_1) d\xi_1.$$

Entonces  $u'$  y  $v$  tienen signos opuestos en una vecindad a derecha de  $x^*$ . Similarmente y usando (4.8) resulta que  $v'$  y  $u$  tienen signos opuestos en una vecindad a derecha de  $x^*$ , si  $v'(x^*) = 0$ .

Luego, si en (4.2) solo una de las desigualdades es estricta y las otras tres contienen la igualdad, analizando todas las posibilidades y usando 3i)-3ii), concluimos que en una vecindad a la derecha de  $x^*$  se verifican

$$u(x) > 0, \quad u'(x) > 0, \quad v(x) < 0, \quad v'(x) < 0$$

y esto contradice la afirmación 1).



4) Para ningún  $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$  se verifica (4.3) con sólo una desigualdad estricta. La prueba es similar a 3). Observamos lo siguiente:

4i) Si  $u(x^*) = 0$ , entonces  $u$  y  $u'$  tienen signos opuestos en una vecindad a izquierda de  $x^*$ , pues

$$u'(x^*) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(x^* + h)}{h}.$$

Igualmente, si  $v(x^*) = 0$  tenemos que  $v$  y  $v'$  tienen signos opuestos en una vecindad a izquierda de  $x^*$ .

4ii) Si  $u'(x^*) = 0$ , por (4.7) tenemos

$$u'(x) = \underbrace{u'(x^*)}_{=0} - \int_{x^*}^x c(\xi_1)v(\xi_1) d\xi_1 = \int_x^{x^*} c(\xi_1)v(\xi_1) d\xi_1.$$

Entonces  $u'$  y  $v$  tienen el mismo signo en una vecindad a izquierda de  $x^*$ . También, usando (4.8), se deduce que  $v'$  y  $u$  tienen el mismo signo en una vecindad a izquierda de  $x^*$ , si  $v'(x^*) = 0$ .

Luego, si en (4.3) solo una de las desigualdades es estricta y las otras tres contienen la igualdad, analizamos todas las posibilidades y usamos 4i)-4ii) para concluir que en una vecindad a la izquierda de  $x^*$  se verifican

$$u(x) > 0, \quad u'(x) < 0, \quad v(x) < 0, \quad v'(x) > 0$$

y esto contradice la afirmación 2).

5) Para ningún  $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$  se verifican (4.4) y (4.5), ni con todas las desigualdades estrictas, ni con solo una desigualdad estricta. La prueba es la misma que para las afirmaciones 1) - 4), pero intercambiando los roles de las funciones  $u$  y  $v$ .

6) No se verifican (4.2) - (4.5) para  $x^* = 0$ ,  $x^* = 1$ .

En la prueba usamos las condiciones de frontera. Para el caso Dirichlet, en  $x^* = 0$  las desigualdades (4.2) y (4.5) son equivalentes a

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad u'(0) \geq 0, \quad v'(0) \leq 0$$

y las desigualdades (4.3) y (4.4) son equivalentes a

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad u'(0) \leq 0, \quad v'(0) \geq 0.$$

Si ambas fueran válidas, con un argumento similar al usado en 3), tendríamos vecindades a derecha de  $x^* = 0$  en las cuales

$$u(x) > 0, \quad u'(x) > 0, \quad v(x) < 0, \quad v'(x) < 0 \quad \text{y}$$

$$u(x) < 0, \quad u'(x) < 0, \quad v(x) > 0, \quad v'(x) > 0,$$

pero por lo visto anteriormente, éstas desigualdades no se verifican.

Procediendo similarmente, tendríamos vecindades a izquierda de  $x^* = 1$  donde

$$u(x) < 0, u'(x) > 0, v(x) > 0, v'(x) < 0 \quad \text{y}$$

$$u(x) > 0, u'(x) < 0, v(x) < 0, v'(x) > 0,$$

pero estas desigualdades tampoco se verifican.

Por tanto, no se verifican (4.2) - (4.5) en  $x^* = 0$ ,  $x^* = 1$  para el caso Dirichlet. La prueba es análoga para el caso Neumann.

**3°** Ahora demostramos (A1). Sea  $u(\bar{x}) = 0$ .

- 1) Si  $v(\bar{x}) \leq 0$ , de (4.2) y (4.3) vemos que  $u'(\bar{x}) \neq 0$ , pues en caso contrario tendríamos que  $\bar{x}$  satisface (4.2) o (4.3) para cualquier valor de  $v'(\bar{x})$ , lo cual es una contradicción. Así tenemos que  $u'(\bar{x}) > 0$  o  $u'(\bar{x}) < 0$ . Si  $u'(\bar{x}) > 0$ , dado que no se verifica (4.2), tenemos que  $v'(\bar{x}) > 0$ . Y si  $u'(\bar{x}) < 0$ , debido a que no se verifica (4.3), tenemos que  $v'(\bar{x}) < 0$ . En cualquier caso concluimos que  $u'(\bar{x})v'(\bar{x}) > 0$ .
- 2) Si  $v(\bar{x}) \geq 0$ , de (4.4) y (4.5) se observa que  $u'(\bar{x}) \neq 0$ , pues si  $u'(\bar{x}) = 0$  tendríamos que  $\bar{x}$  satisface (4.4) o (4.5) para cualquier valor de  $v'(\bar{x})$ , y eso es una contradicción. Ahora, si  $u'(\bar{x}) > 0$ , como no se verifica (4.5), tenemos que  $v'(\bar{x}) > 0$ . Y si  $u'(\bar{x}) < 0$ , al no verificarse (4.4), tenemos que  $v'(\bar{x}) < 0$ . Por tanto, en cualquier caso tenemos  $u'(\bar{x})v'(\bar{x}) > 0$ .

La prueba es análoga si  $v(\bar{x}) = 0$ .

**4°** Veamos (A2). Sea  $u'(\bar{x}) = 0$ .

- 1) Si  $v'(\bar{x}) \leq 0$ , de (4.2) y (4.5) concluimos que  $u(\bar{x}) \neq 0$ . Si fuera  $u(\bar{x}) = 0$  tendríamos que  $\bar{x}$  verifica (4.2) o (4.5) para todo valor de  $v(\bar{x})$ , lo cual es una contradicción. Entonces  $u(\bar{x}) > 0$  o  $u(\bar{x}) < 0$ . Si  $u(\bar{x}) > 0$ , al no verificarse (4.2), tenemos que  $v(\bar{x}) > 0$ . Y si  $u(\bar{x}) < 0$ , como no se verifica (4.5), tenemos que  $v(\bar{x}) < 0$ . Luego, en ambos casos concluimos que  $u(\bar{x})v(\bar{x}) > 0$ .
- 2) Si  $v'(\bar{x}) \geq 0$ , usando (4.3) y (4.4) también tenemos a  $u(\bar{x})v(\bar{x}) > 0$ .

La prueba es análoga si  $v'(\bar{x}) = 0$ .

5° Ahora veamos la prueba de (B1).

Recordemos que por hipótesis tenemos para  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ,  $x_1 < x_2$ ,

$$u'(x_1) = u'(x_2) = 0 \quad \text{y} \quad u'(x) \neq 0 \quad \text{para} \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Por (A2) tenemos que  $u(x_1)v(x_1) > 0$  y  $u(x_2)v(x_2) > 0$ , en particular  $v(x_1) \neq 0 \neq v(x_2)$ . Luego, por (4.7)

$$0 = u'(x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} c(\xi_1)v(\xi_1) d\xi_1,$$

lo cual implica que  $v$  cambia de signo en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Si  $v$  cambiara de signo sólo una vez tendríamos que  $v(x_1)v(x_2) < 0$  y luego por (A2) se concluiría que  $u(x_1)u(x_2) < 0$ , con lo cual terminaría la prueba de (B1).

**Afirmación:**  $v$  sólo cambia de signo una vez en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ .

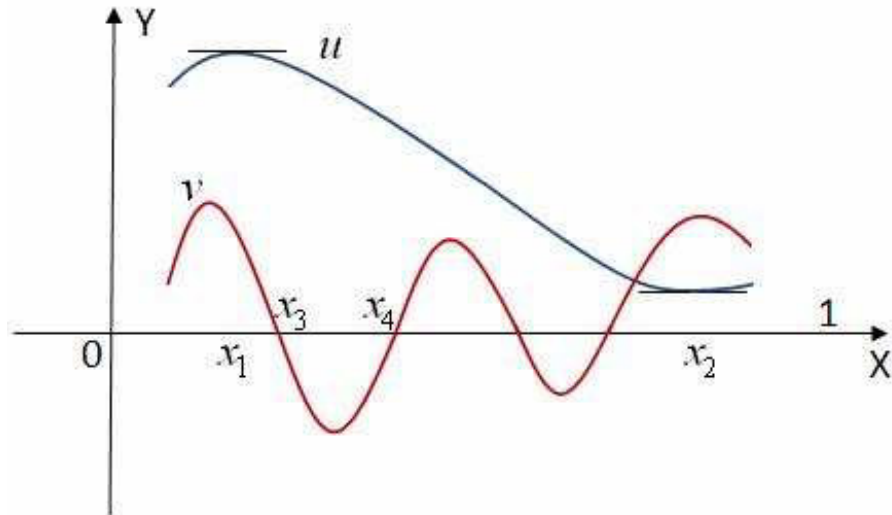
Primero, observamos que  $u$  no puede tener más de un cero en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , pues en caso contrario existiría también un punto  $\bar{x} \in \langle x_1, x_2 \rangle$  tal que  $u'(\bar{x}) = 0$ , lo cual sería una contradicción con la hipótesis.

Ahora, supongamos que  $v$  cambia de signo más de una vez en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ .

Entonces existe un intervalo  $[x_3, x_4] \subset \langle x_1, x_2 \rangle$  tal que  $uv < 0$  en  $\langle x_3, x_4 \rangle$  y  $v(x_3) = v(x_4) = 0$ . En efecto, tenemos dos situaciones:

- 1) Cuando  $u$  no tiene ceros en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ .

Al ser  $uv > 0$  en  $x_1$  y  $x_2$ ,  $v$  cambiaría de signo un número par de veces, es decir  $v$  tendría un número par de ceros en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Entonces, haciendo  $x_3$  y  $x_4$  los dos primeros ceros de  $v$  en  $\langle x_1, x_2 \rangle$  se cumple la afirmación.



2) Cuando  $u$  tiene un cero en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , digamos  $r$ .

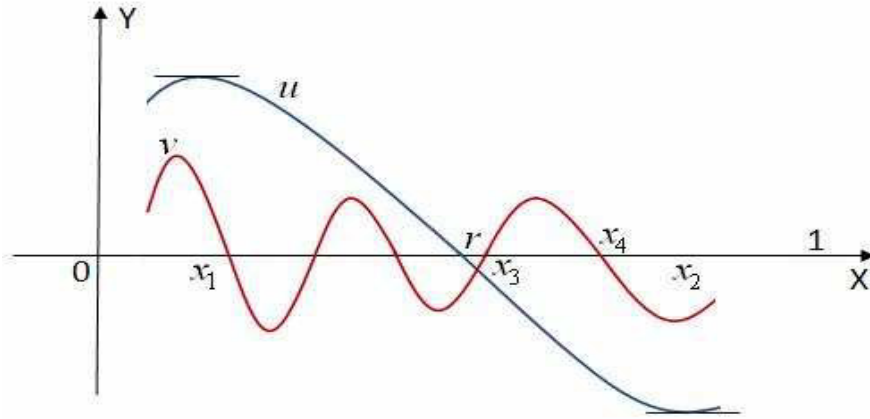
Al ser  $uv > 0$  en  $x_1$  y  $x_2$ ,  $v$  cambiaría de signo un número impar  $n \geq 3$  de veces, es decir  $v$  tendría un número impar  $n \geq 3$  de ceros en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Entonces tenemos los siguientes casos:

i) El intervalo  $\langle x_1, r \rangle$  contiene un número par de ceros de  $v$ .

En este caso hacemos  $x_3$  y  $x_4$  los dos primeros ceros de  $v$  en  $\langle x_1, x_2 \rangle$  y se cumple la afirmación.

ii) El intervalo  $\langle x_1, r \rangle$  contiene un número impar de ceros  $v$ .

Observamos que en este intervalo  $v$  cambia de signo un número impar de veces mientras que  $u$  mantiene su signo inicial. Entonces haciendo  $x_3$  y  $x_4$  los dos primeros ceros de  $v$  en  $\langle r, x_2 \rangle$  se cumple la afirmación.



iii) Todos los ceros de  $v$  en  $\langle x_1, x_2 \rangle$  están en el intervalo  $\langle x_1, r \rangle$ .

En este caso hacemos  $x_3$  y  $x_4$  los dos primeros ceros de  $v$  y se cumple la afirmación.

iv) Todos los ceros de  $v$  en  $\langle x_1, x_2 \rangle$  están en el intervalo  $\langle r, x_2 \rangle$ .

Aquí con  $x_3$  y  $x_4$  los dos últimos ceros de  $v$  en  $\langle x_1, x_2 \rangle$  se verifica la afirmación.

Así, en todos los casos tenemos que si  $v$  cambiara de signo más de una vez en  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , entonces existiría un intervalo  $[x_3, x_4] \subset \langle x_1, x_2 \rangle$  tal que  $uv < 0$  en  $\langle x_3, x_4 \rangle$  y  $v(x_3) = v(x_4) = 0$ . En consecuencia, existiría un punto  $\bar{x} \in \langle x_3, x_4 \rangle$  tal que  $v'(\bar{x}) = 0$  y  $u(\bar{x})v(\bar{x}) < 0$ , pero esto contradice (A2). Por tanto,  $v$  sólo cambia de signo una vez en  $\langle x_1, x_2 \rangle$  y, como ya fue visto, esto implica que  $u(x_1)u(x_2) < 0$ .

6° Finalmente, veamos (B2).

Por hipótesis tenemos que  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $u(x_1) = u(x_2) = 0$  y  $u(x) \neq 0$  para  $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ . Entonces  $u$  tiene el mismo signo en una vecindad a derecha de  $x_1$  y a izquierda de  $x_2$ . Y como  $u$  y  $u'$  tienen el mismo signo en una vecindad a derecha de  $x_1$  y signos opuestos en una vecindad a izquierda de  $x_2$ , concluimos directamente que  $u'(x_1)u'(x_2) < 0$ . ■

Ahora presentamos los resultados que nos proporcionarán importantes propiedades de las soluciones  $(u, v)$  del problema (3.1), respecto a su signo cerca a la frontera y respecto a su número de ceros en el intervalo.

**Proposición 4.1** Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$  y  $(u, v)$  es la correspondiente solución no trivial del problema (3.1), entonces para  $(u, v)$  se tienen las mismas conclusiones que el Lema 4.1; en particular  $u$  y  $v$  solo tienen ceros simples y ambas tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1.

**Demostración.-** Sea  $\mathcal{X}_A(x)$  la función característica. Observamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\{f \geq 0\}}(x) f(x) &= \begin{cases} 0, & f(x) < 0 \\ f(x), & f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= f^+(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\{f < 0\}}(x) f(x) &= \begin{cases} f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= -f^-(x). \end{aligned}$$

Luego, si  $(u, v)$  es solución del problema 3.1, entonces

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- = [\lambda^+ \mathcal{X}_{\{v \geq 0\}} + \lambda^- \mathcal{X}_{\{v < 0\}}] v & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- = [\lambda^+ \mathcal{X}_{\{u \geq 0\}} + \mu^- \mathcal{X}_{\{u < 0\}}] u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}. \end{cases}$$

Así,  $(u, v)$  es solución del problema (4.1) con

$$\begin{aligned} c(x) &= \lambda^+ \mathcal{X}_{\{v \geq 0\}}(x) + \lambda^- \mathcal{X}_{\{v < 0\}}(x) > 0, \\ d(x) &= \lambda^+ \mathcal{X}_{\{u \geq 0\}}(x) + \mu^- \mathcal{X}_{\{u < 0\}}(x) > 0 \end{aligned}$$

y se verifican todas las hipótesis del lema anterior. Por lo tanto, para  $(u, v)$  tenemos que se cumplen todas las conclusiones del lema 4.1.

En particular, (A1) implica que los ceros de  $u$  y  $v$  son simples, pues si  $u(\bar{x}) = 0$  o  $v(\bar{x}) = 0$  entonces  $u'(\bar{x}) \neq 0$  y  $v'(\bar{x}) \neq 0$ . También, para el caso Dirichlet, al ser  $u(0) = v(0) = 0$ , tenemos que  $u'(0)v'(0) > 0$  con lo cual  $u'$  y  $v'$  tienen el mismo signo en una vecindad  $B_{\varepsilon_1}$  a la derecha de 0. Pero

$$u'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(0+h)}{h} \quad \text{y} \quad v'(0) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{v(0+k)}{k}$$

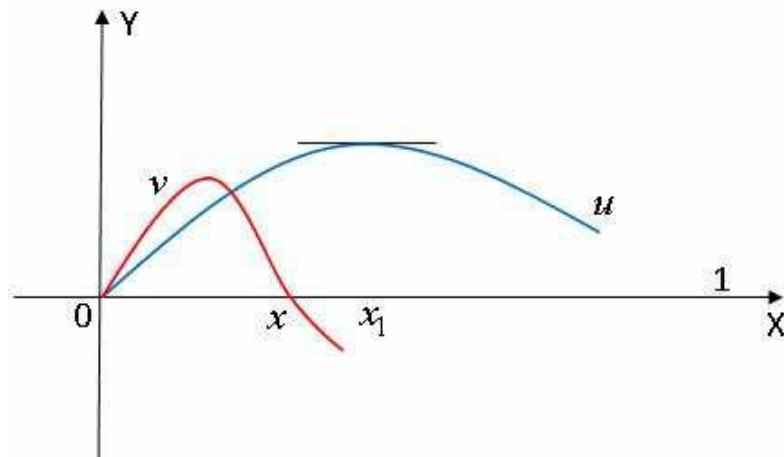
entonces  $u'$  y  $u$ , así como  $v'$  y  $v$  tienen el mismo signo en vecindades  $B_{\varepsilon_2}$  y  $B_{\varepsilon_3}$  a la derecha de 0, respectivamente. Luego,  $u$  y  $v$  tienen el mismo signo en la vecindad  $B_\varepsilon$  ( $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ). En forma similar tenemos, para el caso Dirichlet, que  $u$  y  $v$  tienen el mismo signo en una vecindad a la izquierda de 1.

Para el caso Neumann, al ser  $u'(0) = v'(0) = 0$  y  $u'(1) = v'(1) = 0$ , (A2) implica que  $u(0)v(0) > 0$  y  $u(1)v(1) > 0$ , y de ahí que  $u$  y  $v$  tienen el mismo signo en una vecindad a la derecha de 0 y en una vecindad a la izquierda de 1. ■

**Proposición 4.2** Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  y  $(u, v)$  es la correspondiente solución no trivial del problema (3.1), entonces  $u$  y  $v$  tienen el mismo número de ceros simples.

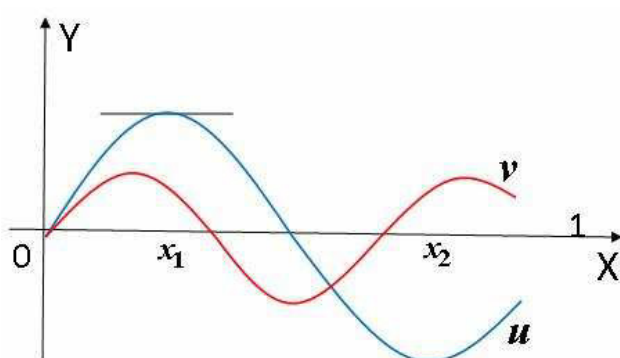
**Demostración.-** La prueba se hará en varias etapas.

1° Sea  $x_1$  el primer punto estacionario de  $u$ , es decir  $u'(x_1) = 0$  (para el caso Neumann  $x_1 = 0$ ). Para el caso Dirichlet afirmamos que no hay ceros de  $u$  ni de  $v$  en  $\langle 0, x_1 \rangle$ . En efecto, por (A1) del lema 4.1,  $u'(0)v'(0) > 0$  y notamos que  $u$  y  $u'$  mantienen su signo en  $\langle 0, x_1 \rangle$ . Si  $v$  tuviera un cero  $\bar{x} \in \langle 0, x_1 \rangle$ , también tendría un punto estacionario  $\bar{y} \in \langle 0, \bar{x} \rangle$ . Entonces  $v'(0)v'(\bar{x}) \leq 0$  y como  $u'$  mantiene su signo en  $\langle 0, x_1 \rangle$  tenemos que  $u'(0)u'(\bar{x}) \geq 0$ . Pero al ser  $u'(0)v'(0) > 0$ , tendríamos que  $u'(\bar{x})v'(\bar{x}) \leq 0$ , contradiciendo (A1).



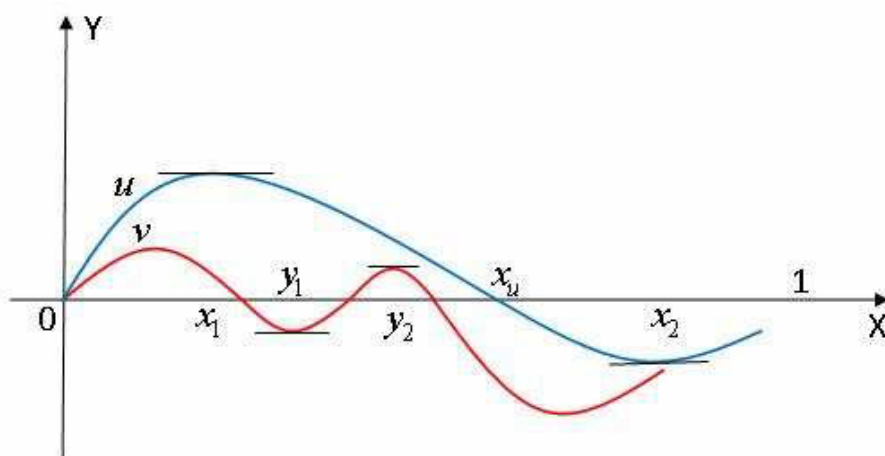
2° Sea  $x_2$  el segundo punto estacionario de  $u$ . Como  $u'(x_1) = u'(x_2) = 0$ , (B1) implica que  $u(x_1)u(x_2) < 0$  y entonces  $u$  tiene exactamente un cero  $x_u \in \langle x_1, x_2 \rangle$ . Afirmamos que  $v$  también tiene un único cero en  $[x_1, x_2]$ . En efecto:

- a) Si  $v$  tuviera un número par de ceros en  $[x_1, x_2]$ ,  $v$  cambiaría de signo un número par de veces en  $[x_1, x_2]$  y tendríamos  $v(x_1)v(x_2) \geq 0$ . Pero por (A2) tenemos que  $u(x_1)v(x_1) > 0$  y  $u(x_2)v(x_2) > 0$ , y como  $u(x_1)u(x_2) < 0$ , concluimos que  $v(x_1)v(x_2) < 0$ . Entonces  $v$  no tiene un número par de ceros en  $[x_1, x_2]$ .

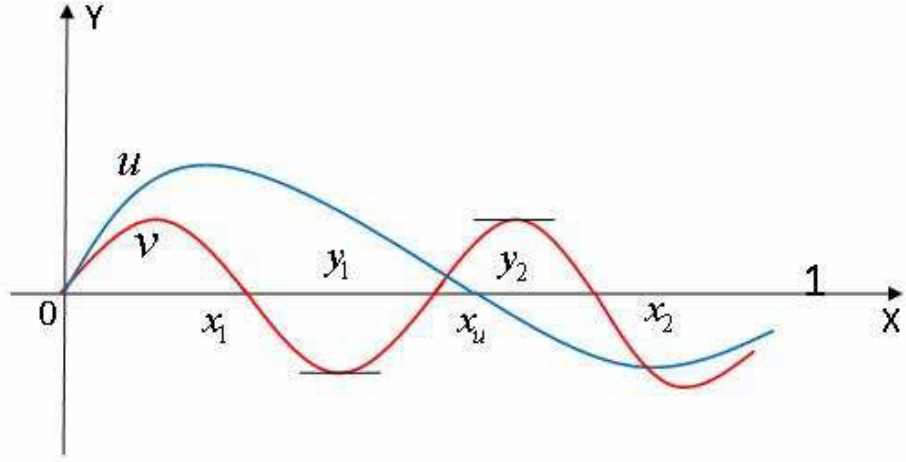


- b) Si  $v$  tuviera tres o más ceros en  $[x_1, x_2]$ , también tendría al menos dos puntos estacionarios  $y_1$  e  $y_2$ .

- i) Si  $y_1, y_2 \in \langle x_1, x_u \rangle$  o  $y_1, y_2 \in [x_u, x_2]$ , tendríamos  $u(y_1)v(y_1) \leq 0$  y  $u(y_2)v(y_2) \geq 0$  o  $u(y_1)v(y_1) \geq 0$  y  $u(y_2)v(y_2) \leq 0$ .



- ii) Si  $y_1 \in \langle x_1, x_u \rangle$  e  $y_2 \in [x_u, x_2 \rangle$ , tendríamos  $u(y_1)v(y_1) \leq 0$  y  $u(y_2)v(y_2) \geq 0$ .



De i) y ii) se concluye que en alguno de los puntos estacionarios resulta  $uv \leq 0$ , contradiciendo (A2).

- 3° Análogamente al apartado anterior (2°), se demuestra que en todos los intervalos entre dos puntos estacionarios consecutivos de  $u$ , las dos funciones  $u$  y  $v$  tienen exactamente un cero.
- 4° Finalmente, para  $x_n$  el último punto estacionario de  $u$ , vemos que no hay ceros de  $u$  ni de  $v$  en  $[x_n, 1 \rangle$ . En efecto,  $u$  y  $u'$  mantienen su signo en  $\langle x_n, 1 \rangle$ . Por (A1) del lema 4.1, tenemos que  $u'(1)v'(1) > 0$ . Si  $v$  tuviera un cero  $\bar{x} \in \langle x_n, 1 \rangle$ , también tendría un punto estacionario  $\bar{y} \in \langle \bar{x}, 1 \rangle$ . Entonces  $v'(\bar{x})v'(1) \leq 0$  y como  $u'$  mantiene su signo en  $\langle x_n, 1 \rangle$  tenemos que  $u'(\bar{x})u'(1) \geq 0$ . Pero como  $u'(1)v'(1) > 0$ , tendríamos que  $u'(\bar{x})v'(\bar{x}) \leq 0$ , lo cual contradice (A1). ■



## Capítulo 5

# Construcción de la parte no trivial del Espectro de Fucik

En este capítulo estudiamos la parte no trivial del espectro de Fucik  $\widehat{\Sigma}_{nt}$ , es decir la parte de  $\widehat{\Sigma}$  cuyas correspondientes soluciones no triviales cambian de signo en  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Empezaremos construyendo un conjunto relacionado  $\widetilde{\Sigma}$  en  $\mathbb{R}^4$ .

Sea el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^-, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (u_0, v_0, u'_0, v'_0), \end{cases} \quad (5.1)$$

con  $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ . Para el caso del problema con condiciones de frontera Dirichlet, definimos los conjuntos

$$\widetilde{\Sigma}^\pm = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R} \quad / \quad \text{la solución } (u, v) \text{ del PVI (5.1)} \\ \text{con } (u_0, v_0, u'_0, v'_0) = (0, 0, \pm 1, s) \text{ satisface } u(1) = v(1) = 0 \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

y para el problema con condiciones de frontera Neumann, definimos

$$\widetilde{\Sigma}^\pm = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R} \quad / \quad \text{la solución } (u, v) \text{ del PVI (5.1)} \\ \text{con } (u_0, v_0, u'_0, v'_0) = (\pm 1, s, 0, 0) \text{ satisface } u'(1) = v'(1) = 0. \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

Tenemos el siguiente resultado.

**Lema 5.1** *Los conjuntos  $\widetilde{\Sigma}^\pm$  son no vacíos.*

**Demostración.-**

- en el caso Dirichlet tenemos:

- i) Para todo  $r > 0$ ,  $(\frac{1}{r^2}(r+1)^2\pi^2, (r+1)^2\pi^2, (r+1)^2\pi^2, 1) \in \tilde{\Sigma}^+$ , pues con la función

$$u_r(t) = \begin{cases} \frac{r}{(r+1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{r} t & , \quad t \in [0, \frac{r}{r+1}] \\ -\frac{1}{(r+1)\pi} \operatorname{sen}(r+1)\pi (t - \frac{r}{r+1}) & , \quad t \in (\frac{r}{r+1}, 1] \end{cases}$$

resulta el par  $(u_r, u_r)$  solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \frac{1}{r^2}(r+1)^2\pi^2 v^+ - (r+1)^2\pi^2 v^-, \\ -v'' = \frac{1}{r^2}(r+1)^2\pi^2 u^+ - (r+1)^2\pi^2 u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (0, 0, 1, 1). \end{cases}$$

Además  $u_r(1) = 0$ .

- ii) Para todo  $s < 0$  y  $\lambda^+ > 0$ ,  $(\lambda^+, -\frac{\pi^2}{s}, -s\pi^2, s) \in \tilde{\Sigma}^-$ . En efecto, el par de funciones  $(u, v) = (-\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}\pi t, \frac{s}{\pi} \operatorname{sen}\pi t)$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ + \frac{\pi^2}{s} v^-, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ + s\pi^2 u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (0, 0, -1, s) \end{cases}$$

y  $u(1) = v(1) = 0$ .

- en el caso Neumann tenemos

- i) Para todo  $r > 0$ ,  $(\frac{1}{4r^2}(r+1)^2\pi^2, \frac{1}{4}(r+1)^2\pi^2, \frac{1}{4}(r+1)^2\pi^2, 1) \in \tilde{\Sigma}^+$ , pues la función

$$v_r(t) = \begin{cases} \cos \frac{(r+1)\pi}{2r} t & , \quad t \in [0, \frac{r}{r+1}] \\ -\frac{1}{r} \cos \frac{(r+1)\pi}{2} (t-1) & , \quad t \in (\frac{r}{r+1}, 1] \end{cases}$$

verifica que el par  $(v_r, v_r)$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \frac{1}{4r^2}(r+1)^2\pi^2 v^+ - \frac{1}{4}(r+1)^2\pi^2 v^-, \\ -v'' = \frac{1}{4r^2}(r+1)^2\pi^2 u^+ - \frac{1}{4}(r+1)^2\pi^2 u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (1, 1, 0, 0) \end{cases}$$

y  $v'_r(1) = 0$ .

ii) Para todo  $s < 0$  y  $\lambda^+ > 0$ ,  $(\lambda^+, 0, 0, s) \in \tilde{\Sigma}^-$ . pues el par de funciones  $(u, v) = (-1, s)$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - 0 v^-, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - 0 u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (-1, s, 0, 0) \end{cases}$$

y  $u'(1) = v'(1) = 0$ . ■

Ahora, introduciendo la notación

$$\widehat{\Sigma}^\pm = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}_+^3 / \exists s \in \mathbb{R} \text{ tal que } (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \tilde{\Sigma}^\pm \}, \quad (5.4)$$

tenemos el siguiente

**Lema 5.2** *Se satisface la igualdad  $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}^+ \cup \widehat{\Sigma}^-$ .*

**Demostración.-** Veamos primero para el caso Dirichlet. Sea  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  y  $(u, v)$  la respectiva solución no trivial del problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0) = v(0) = 0, \quad u(1) = v(1) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Observamos que  $\left( \frac{u}{|u'(0)|}, \frac{v}{|u'(0)|} \right)$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^-, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (0, 0, \pm 1, s), \end{cases} \quad (5.6)$$

con  $s = \frac{v'(0)}{|u'(0)|}$  y además  $\frac{u}{|u'(0)|}(1) = \frac{v}{|u'(0)|}(1) = 0$ , entonces  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}^\pm$ .

Análogamente, para el caso Neumann, sea  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  y  $(u, v)$  la respectiva solución no trivial del problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ u'(0) = v'(0) = 0, \quad u'(1) = v'(1) = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Se observa que  $\left(\frac{u}{|u(0)|}, \frac{v}{|u(0)|}\right)$  es solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^-, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (\pm 1, s, 0, 0), \end{cases} \quad (5.8)$$

con  $s = \frac{v(0)}{|u(0)|}$  y tal que  $\frac{u'}{|u(0)|}(1) = \frac{v'}{|u(0)|}(1) = 0$ . Luego  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}^\pm$  ■.

**Observación 5.1** *Con lo que acabamos de demostrar y en vista de la segunda simetría dada en el Lema 3.3 simplificamos nuestro estudio a solo uno de las componentes de  $\widehat{\Sigma}_{nt}$ , digamos  $\widehat{\Sigma}^+$ .*

## 5.1. Estudio local de $\widetilde{\Sigma}^+$

En el siguiente Lema usaremos el Teorema de la función implícita para describir  $\widetilde{\Sigma}^+$  en una vecindad de uno de sus puntos.

**Lema 5.3** *Dado  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0) \in \widetilde{\Sigma}^+$  tal que las correspondientes soluciones no triviales  $u_0$  y  $v_0$  ambas cambian de signo, entonces localmente  $\widetilde{\Sigma}^+$  es de la forma,*

$$(\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), \lambda^-, \mu^-, s(\lambda^-, \mu^-)),$$

donde para un adecuado  $\varepsilon > 0$

$$(\lambda^+, s) : \langle \lambda_0^- - \varepsilon, \lambda_0^- + \varepsilon \rangle \times \langle \mu_0^- - \varepsilon, \mu_0^- + \varepsilon \rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (5.9)$$

es una función  $C^1$  de  $\lambda^-$  y  $\mu^-$ , más aún

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) = \frac{-\int_0^1 (v_0^-)^2 dt}{\int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt} < 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) = \frac{-\int_0^1 (u_0^-)^2 dt}{\int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt} < 0. \quad (5.11)$$

Finalmente, las correspondientes soluciones no triviales tienen el mismo número de ceros, todos simples, y tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1.

### Demostración.-

1° Veamos la prueba para el caso Dirichlet.

Denotamos por  $(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s](x)$  a la solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u, v, u', v')(0) = (0, 0, 1, s) & . \end{cases} \quad (5.12)$$

y aplicaremos el Teorema de la función implícita (Teorema 1.5) al sistema

$$(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s](1) = (0, 0) . \quad (5.13)$$

Se observa que  $(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s](x)$  es una función  $C^1$  de las cinco variables  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in B_0$  y  $x \in [0, 1]$ , donde  $B_0$  es una adecuada vecindad del punto  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0)$ .

Sea  $(u_0, v_0) = (u, v)[\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0]$ . Como los ceros de  $u_0$  y  $v_0$  son simples (por el Lema 4.1), podemos restringir la vecindad  $B_0$  tal que se mantenga esta propiedad para todas las funciones  $(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s]$  con  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in B_0$  y tal que los ceros interiores de  $u$  y  $v$  se mantengan y ambas  $u$  y  $v$  tengan el mismo signo en una vecindad de 0 y de su último cero.

Ahora, para aplicar el Teorema de la Función Implícita a (5.13) y resolver localmente con respecto a las variables  $\lambda^-, \mu^-$ , debemos probar que

$$\det \begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & v_{\lambda^+}(1) \\ u_s(1) & v_s(1) \end{bmatrix} \neq 0 .$$

Sean  $c(x) = \lambda_0^+ \mathcal{X}_{\{v_0 > 0\}}(x) + \lambda_0^- \mathcal{X}_{\{v_0 < 0\}}(x)$  y  $d(x) = \lambda_0^+ \mathcal{X}_{\{u_0 > 0\}}(x) + \mu_0^- \mathcal{X}_{\{u_0 < 0\}}(x)$ , entonces  $(u_0, v_0)$  también satisface el PVI

$$\begin{cases} -u_0'' = c(x) v_0 & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v_0'' = d(x) u_0 & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u_0, v_0, u_0', v_0')(0) = (0, 0, 1, s_0) . \end{cases} \quad (5.14)$$

Definimos  $(u_s, v_s)(x) = \frac{\partial}{\partial s}(u, v)[\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0](x)$ . Derivando (5.14) respecto a  $s$  obtenemos

$$\begin{cases} -u_s'' = c(x) v_s & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v_s'' = d(x) u_s & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u_s, v_s, u_s', v_s')(0) = (0, 0, 0, 1) , \end{cases} \quad (5.15)$$

y notamos que, integrando dos veces y usando  $v_s(0) = 0$  y  $v'_s(0) = 1$ , para  $x \in \langle 0, 1 ]$  tenemos

$$u_s(x) = - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} c(\xi_2) v_s(\xi_2) d\xi_2 < 0$$

y

$$v_s(x) = x - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d(\xi_2) u_s(\xi_2) d\xi_2 > 0 .$$

Ahora, multiplicando la primera ecuación en (5.15) por  $v_0$ , la segunda ecuación por  $u_0$ , sumando e integrando, tenemos

$$\int_0^1 [-u''_s v_0 - v''_s u_0] dt = \int_0^1 [c(x) v_s v_0 + d(x) u_s u_0] dt \quad (5.16)$$

y multiplicando la primera ecuación en (5.14) por  $v_s$ , la segunda ecuación por  $u_s$ , sumando e integrando, también tenemos

$$\int_0^1 [-u''_0 v_s - v''_0 u_s] dt = \int_0^1 [c(x) v_s v_0 + d(x) u_s u_0] dt . \quad (5.17)$$

Luego, integrando por partes dos veces el lado izquierdo de (5.16) llegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^1 [-u_s v''_0 - v_s u''_0] dt + [-u'_s v_0 - v'_s u_0 + u_s v'_0 + v_s u'_0]_0^1 \\ = \int_0^1 [c(x) v_s v_0 + d(x) u_s u_0] dt . \end{aligned} \quad (5.18)$$

De otro lado, como  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ ,  $(u_0, v_0)$  también es solución del problema de valor frontera, es decir

$$u_0(0) = v_0(0) = u_0(1) = v_0(1) = 0$$

y en vista de (5.17), entonces en la ecuación (5.18) solo queda

$$(u_s v'_0 + v_s u'_0)(1) = 0 . \quad (5.19)$$

En forma análoga, definimos

$$(u_{\lambda^+}, v_{\lambda^+})(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda^+} (u, v) [\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0](x) ,$$

$$(u_{\lambda^-}, v_{\lambda^-})(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda^-} (u, v) [\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0](x) ,$$

$$(u_{\mu^-}, v_{\mu^-})(x) = \frac{\partial}{\partial \mu^-} (u, v) [\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0](x) .$$

(nótese que la dependencia respecto a las variables  $\lambda^+$ ,  $\lambda^-$  y  $\mu^-$  está en los coeficientes  $c(x)$  y  $d(x)$ ). Derivando (5.14) respecto a  $\lambda^+$ ,  $\lambda^-$  y  $\mu^-$  obtenemos, respectivamente:

$$\begin{cases} -u''_{\lambda+} = c(x) v_{\lambda+} + v_0^+ & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ -v''_{\lambda+} = d(x) u_{\lambda+} + u_0^+ & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ (u_{\lambda+}, v_{\lambda+}, u'_{\lambda+}, v'_{\lambda+})(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\begin{cases} -u''_{\lambda-} = c(x) v_{\lambda-} - v_0^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ -v''_{\lambda-} = d(x) u_{\lambda-} & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ (u_{\lambda-}, v_{\lambda-}, u'_{\lambda-}, v'_{\lambda-})(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases} \quad (5.21)$$

y

$$\begin{cases} -u''_{\mu-} = c(x) v_{\mu-} & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ -v''_{\mu-} = d(x) u_{\mu-} - u_0^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ (u_{\mu-}, v_{\mu-}, u'_{\mu-}, v'_{\mu-})(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases} \quad (5.22)$$

**Afirmación:**

$$(u_{\lambda+} v'_0 + v_{\lambda+} u'_0)(1) = \int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt > 0, \quad (5.23)$$

$$(u_{\lambda-} v'_0 + v_{\lambda-} u'_0)(1) = \int_0^1 (v_0^-)^2 dt > 0, \quad (5.24)$$

$$(u_{\mu-} v'_0 + v_{\mu-} u'_0)(1) = \int_0^1 (u_0^-)^2 dt > 0. \quad (5.25)$$

En efecto, veamos la prueba de (5.23).

Multiplicamos la primera ecuación en (5.20) por  $v_0$ , la segunda ecuación por  $u_0$ , sumamos e integramos. Así tenemos

$$\int_0^1 [-u''_{\lambda+} v_0 - v''_{\lambda+} u_0] dt = \int_0^1 [c(x) v_{\lambda+} v_0 + (v_0^+)^2 + d(x) u_{\lambda+} u_0 + (u_0^+)^2] dt. \quad (5.26)$$

Ahora multiplicamos la primera ecuación en (5.14) por  $v_{\lambda+}$ , la segunda ecuación por  $u_{\lambda+}$ , sumamos, integramos y obtenemos

$$\int_0^1 [-u''_0 v_{\lambda+} - v''_0 u_{\lambda+}] dt = \int_0^1 [c(x) v_{\lambda+} v_0 + d(x) u_{\lambda+} u_0] dt. \quad (5.27)$$

Luego, integramos por partes dos veces el lado izquierdo de (5.26) y llegamos

a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [-u_{\lambda+} v''_0 - v_{\lambda+} u''_0] dt + [-u'_{\lambda+} v_0 - v'_{\lambda+} u_0 + u_{\lambda+} v'_0 + v_{\lambda+} u'_0]_0^1 \\ &= \int_0^1 [c(x) v_{\lambda+} v_0 + (v_0^+)^2 + d(x) u_{\lambda+} u_0 + (u_0^+)^2] dt. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Finalmente, por (5.27) y las condiciones de frontera, en la ecuación (5.28) solo queda

$$(u_{\lambda^+}v'_0 + v_{\lambda^+}u'_0)(1) = \int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt.$$

Análogamente se demuestran (5.24) y (5.25).

Ahora, como el vector  $(u_s(1), v_s(1))$  es no nulo y por (5.19) es ortogonal a  $(v'_0(1), u'_0(1))$ , mientras que por (5.23)  $(u_{\lambda^+}(1), v_{\lambda^+}(1))$  no es ortogonal a  $(v'_0(1), u'_0(1))$ , entonces  $(u_s(1), v_s(1))$  y  $(u_{\lambda^+}(1), v_{\lambda^+}(1))$  no son paralelos. En consecuencia

$$\det \begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & v_{\lambda^+}(1) \\ u_s(1) & v_s(1) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (5.29)$$

y, aplicando el Teorema de la función implícita al sistema (5.13), obtenemos la función  $(\lambda^+, s)(\lambda^-, \mu^-)$ .

También podemos obtener las derivadas  $\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-)$  y  $\frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-)$ .

En efecto, derivando (5.13) respecto a  $\lambda^-$  y  $\mu^-$ , tenemos

$$\begin{aligned} u_{\lambda^+}(1) \cdot \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) + u_{\lambda^-}(1) \times 1 + u_{\mu^-}(1) \times 0 + u_s(1) \cdot \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) &= 0, \\ u_{\lambda^+}(1) \cdot \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) + u_{\lambda^-}(1) \times 0 + u_{\mu^-}(1) \times 1 + u_s(1) \cdot \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) &= 0, \\ v_{\lambda^+}(1) \cdot \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) + v_{\lambda^-}(1) \times 1 + v_{\mu^-}(1) \times 0 + v_s(1) \cdot \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) &= 0, \\ v_{\lambda^+}(1) \cdot \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) + v_{\lambda^-}(1) \times 0 + v_{\mu^-}(1) \times 1 + v_s(1) \cdot \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) &= 0, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & u_s(1) \\ v_{\lambda^+}(1) & v_s(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_{\lambda^-}(1) & u_{\mu^-}(1) \\ v_{\lambda^-}(1) & v_{\mu^-}(1) \end{bmatrix}; \quad (5.30)$$

y multiplicando ambos términos a la izquierda por  $(v'_0(1), u'_0(1))$  tenemos

$$\begin{aligned} & \left[ (u_{\lambda^+}v'_0 + v_{\lambda^+}u'_0)(1) \quad (u_s v'_0 + v_s u'_0)(1) \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \end{bmatrix} \\ &= - \left[ (u_{\lambda^-}v'_0 + v_{\lambda^-}u'_0)(1) \quad (u_{\mu^-}v'_0 + v_{\mu^-}u'_0)(1) \right]. \quad (5.31) \end{aligned}$$



Luego, por (5.19), (5.23), (5.24) y (5.25),

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt \quad 0 \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \end{bmatrix} \\ &= - \left[ \int_0^1 (v_0^-)^2 dt \quad \int_0^1 (u_0^-)^2 dt \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

y de ahí tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) &= \frac{- \int_0^1 (v_0^-)^2 dt}{\int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt} < 0 \quad \text{y} \\ \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) &= \frac{- \int_0^1 (u_0^-)^2 dt}{\int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt} < 0. \end{aligned}$$

2° Ahora veamos los principales pasos de la prueba para el caso Neumann.

Denotamos por  $(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s](x)$  a la solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u, v, u', v')(0) = (1, s, 0, 0) \end{cases} \quad (5.33)$$

y aplicaremos el Teorema de la función implícita al sistema

$$(u', v')[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s](1) = (0, 0), \quad (5.34)$$

para lo cual debemos probar

$$\det \begin{bmatrix} u'_{\lambda^+}(1) & v'_{\lambda^+}(1) \\ u'_s(1) & v'_s(1) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Con las mismas notaciones de la primera parte de la demostración, observamos que  $(u_0, v_0)$  satisface el PVI

$$\begin{cases} -u_0'' = c(x) v_0 & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v_0'' = d(x) u_0 & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u_0, v_0, u_0', v_0')(0) = (1, s_0, 0, 0) \end{cases} \quad (5.35)$$

y se verifica

$$\begin{cases} -u_s'' = c(x) v_s & \text{en } \langle 0, 1 \rangle , \\ -v_s'' = d(x) u_s & \text{en } \langle 0, 1 \rangle , \\ (u_s, v_s, u_s', v_s')(0) = (0, 1, 0, 0) . \end{cases} \quad (5.36)$$

De (5.36), integrando y usando  $u_s < 0$  y  $v_s > 0$ , para  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  tenemos

$$\begin{aligned} u_s'(x) &= - \int_0^x c(\xi_1) v_s(\xi_1) d\xi_1 < 0 \text{ y} \\ v_s'(x) &= - \int_0^x d(\xi_1) u_s(\xi_1) d\xi_1 > 0 . \end{aligned}$$

Ahora, efectuando las mismas operaciones que en la primera parte y usando el hecho que  $(u_0, v_0)$  también es solución del problema de valor frontera, es decir

$$u_0'(0) = v_0'(0) = u_0'(1) = v_0'(1) = 0 ,$$

obtenemos las siguientes identidades

$$(u_s' v_0 + v_s' u_0)(1) = 0 , \quad (5.37)$$

$$(u_{\lambda^+}' v_0 + v_{\lambda^+}' u_0)(1) = \int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt > 0 , \quad (5.38)$$

$$(u_{\lambda^-}' v_0 + v_{\lambda^-}' u_0)(1) = \int_0^1 (v_0^-)^2 dt > 0 , \quad (5.39)$$

$$(u_{\mu^-}' v_0 + v_{\mu^-}' u_0)(1) = \int_0^1 (u_0^-)^2 dt > 0 . \quad (5.40)$$

Como el vector  $(u_s'(1), v_s'(1))$  es no nulo y por (5.37) es ortogonal a  $(v_0(1), u_0(1))$ , y por (5.38)  $(u_{\lambda^+}'(1), v_{\lambda^+}'(1))$  no es ortogonal a  $(v_0(1), u_0(1))$ , entonces

$$\det \begin{bmatrix} u_{\lambda^+}'(1) & v_{\lambda^+}'(1) \\ u_s'(1) & v_s'(1) \end{bmatrix} \neq 0 . \quad (5.41)$$

Con esto, aplicamos el Teorema de la función implícita al sistema (5.34) y obtenemos la función  $(\lambda^+, s)(\lambda^-, \mu^-)$ . Más aún, derivando (5.34) respecto a  $\lambda^-$  y  $\mu^-$  llegamos a

$$\begin{bmatrix} u'_{\lambda^+}(1) & u'_s(1) \\ v'_{\lambda^+}(1) & v'_s(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u'_{\lambda^-}(1) & u'_{\mu^-}(1) \\ v'_{\lambda^-}(1) & v'_{\mu^-}(1) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

y multiplicando ambos términos a la izquierda por  $(v_0(1), u_0(1))$  tenemos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (u'_{\lambda^+}v_0 + v'_{\lambda^+}u_0)(1) & (u'_sv_0 + v'_su_0)(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} (u'_{\lambda^-}v_0 + v'_{\lambda^-}u_0)(1) & (u'_{\mu^-}v_0 + v'_{\mu^-}u_0)(1) \end{bmatrix}, \quad (5.43) \end{aligned}$$

de donde, por (5.37)-(5.40),

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \int_0^1 (v_0^-)^2 dt & \int_0^1 (u_0^-)^2 dt \end{bmatrix}. \quad (5.44) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) &= \frac{-\int_0^1 (v_0^-)^2 dt}{\int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt} < 0 \quad \text{y} \\ \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) &= \frac{-\int_0^1 (u_0^-)^2 dt}{\int_0^1 [(u_0^+)^2 + (v_0^+)^2] dt} < 0. \end{aligned}$$

■

## 5.2. Estudio global de $\tilde{\Sigma}^+$

Aquí usaremos la información local obtenida en el Lema 5.3 para obtener una descripción cualitativa del conjunto  $\tilde{\Sigma}^+$ . Para eso, veremos los siguientes resultados.

**Lema 5.4** *Sea una sucesión  $\{(\lambda_n^+, \lambda_n^-, \mu_n^-, s_n)\} \subseteq \tilde{\Sigma}^+$  tal que  $(\lambda_n^+, \lambda_n^-, \mu_n^-)$  converge a  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-) \in \mathbb{R}^3$ , entonces existe una subsucesión  $\{s_n\}$  convergente a  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ . Más aún, si la sucesión de las correspondientes soluciones no triviales  $(u_n, v_n)$  es compuesta por funciones todas ellas con el mismo número de ceros simples, entonces la función  $(u_0, v_0)$  correspondiente al punto  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0)$  también tiene ese mismo número de ceros (simples).*

**Demostración.-**

1) Primero consideramos el caso Dirichlet.

Dado que  $\{(\lambda_n^+, \lambda_n^-, \mu_n^-, s_n)\} \subseteq \tilde{\Sigma}^+$ , tenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica el PVI

$$\begin{cases} -u_n'' = \lambda_n^+ v_n^+ - \lambda_n^- v_n^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v_n'' = \lambda_n^+ u_n^+ - \mu_n^- u_n^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u_n(0), v_n(0), u_n'(0), v_n'(0)) = (0, 0, 1, s_n) \end{cases} \quad (5.45)$$

y  $u_n(1) = v_n(1) = 0$ .

Por el Lema 3.1 y el Teorema 1.3, las funciones  $u_n, v_n \in H^2(0, 1) \subset C^{1,1/2}[0, 1]$ .

Sea  $(U_n, V_n) = \frac{1}{\|(u_n, v_n)\|_{H^2 \times H^2}}(u_n, v_n)$ . Entonces  $\|(U_n, V_n)\|_{H^2 \times H^2} = 1$ .

Luego existe una subsucesión, que seguiremos denotando  $(U_n, V_n)$ , tal que  $(U_n, V_n) \rightharpoonup (U_0, V_0)$  (converge débilmente) en  $H^2(0, 1) \times H^2(0, 1)$  y que  $(U_n, V_n) \rightarrow (U_0, V_0)$  (converge fuertemente) en  $C^1[0, 1] \times C^1[0, 1]$ . Observamos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se verifica

$$\begin{cases} -U_n'' = \lambda_n^+ V_n^+ - \lambda_n^- V_n^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -V_n'' = \lambda_n^+ U_n^+ - \mu_n^- U_n^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (U_n(0), V_n(0), U_n'(0), V_n'(0)) = (0, 0, \frac{1}{r_n}, \frac{s_n}{r_n}) \end{cases} \quad (5.46)$$

y  $U_n(1) = V_n(1) = 0$ , donde  $r_n = \|(u_n, v_n)\|_{H^2 \times H^2}$  y  $s_n = \frac{V_n'(0)}{U_n'(0)}$ .

Ahora sean  $\phi, \psi \in H_0^1(0, 1)$ . Existen sucesiones  $\{\phi_k\}, \{\psi_k\} \subset C_0^\infty(0, 1)$  tal que  $\phi_k \rightarrow \phi$  y  $\psi_k \rightarrow \psi$ . Multiplicando la primera ecuación de (5.46) por

$\phi_k$  , la segunda por  $\psi_k$  e integrando, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\lambda_n^+ V_n^+ - \lambda_n^- V_n^-) \phi_k &= - \int_0^1 U_n'' \phi_k = \int_0^1 U_n' \phi_k' \quad y \\ \int_0^1 (\lambda_n^+ U_n^+ - \lambda_n^- U_n^-) \psi_k &= - \int_0^1 V_n'' \psi_k = \int_0^1 V_n' \psi_k' \quad ;\end{aligned}$$

tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  y sumando, llegamos a la ecuación variacional para  $(U_n, V_n) : \forall \phi, \psi \in H_0^1(0, 1)$

$$\int_0^1 (U_n' \phi' + V_n' \psi') = \int_0^1 (\lambda_n^+ V_n^+ - \lambda_n^- V_n^-) \phi + (\lambda_n^+ U_n^+ - \mu_n^- U_n^-) \psi. \quad (5.47)$$

Ahora, tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  , resulta

$$\int_0^1 (U_0' \phi' + V_0' \psi') = \int_0^1 (\lambda_0^+ V_0^+ - \lambda_0^- V_0^-) \phi + (\lambda_0^+ U_0^+ - \mu_0^- U_0^-) \psi, \quad (5.48)$$

$\forall \phi, \psi \in H_0^1(0, 1)$  , es decir  $(U_0, V_0)$  es una solución de (3.1) con coeficientes  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-)$  . Pero por el Lema 3.1 las soluciones también son clásicas, entonces tenemos

$$\int_0^1 (-U_n'' + U_0'')^2 = \int_0^1 [(\lambda_n^+ V_n^+ - \lambda_n^- V_n^-) - (\lambda_0^+ V_0^+ - \lambda_0^- V_0^-)]^2 \quad y \quad (5.49)$$

$$\int_0^1 (-V_n'' + V_0'')^2 = \int_0^1 [(\lambda_n^+ U_n^+ - \lambda_n^- U_n^-) - (\lambda_0^+ U_0^+ - \lambda_0^- U_0^-)]^2. \quad (5.50)$$

Puesto que  $(\lambda_n^+, \lambda_n^-, \mu_n^-) \rightarrow (\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-)$  , los lados derechos de (5.49) y (5.50) convergen a cero y por tanto tenemos que  $U_n \rightarrow U_0$  y  $V_n \rightarrow V_0$  fuertemente en  $H^2$  . Esto implica que  $\|(U_0, V_0)\|_{H^2 \times H^2} = 1$  y de ahí que  $(U_0, V_0)$  es una solución no trivial de (3.1).

Ahora, por la convergencia  $C^1$  ,  $U_n'(0)$  converge a  $U_0'(0)$  y como  $U_n'(0) = \frac{1}{r_n}$ ,  $U_n'(0) > 0$ , entonces  $U_0'(0) > 0$  . Y al ser  $U_0(0) = 0$  , el Lema 4.1 nos permite afirmar que  $V_0'(0) > 0$  . Entonces  $(\frac{U_0}{U_0'(0)}, \frac{V_0}{U_0'(0)})$  es solución del PVI (5.1)

con condiciones iniciales  $(0, 0, 1, s_0)$  donde  $s_0 = \frac{V_0'(0)}{U_0'(0)}$  , y además  $\frac{U_0}{U_0'(0)}(1) = \frac{V_0}{U_0'(0)}(1) = 0$  . Con todo esto concluimos que  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, \frac{V_0'(0)}{U_0'(0)}) \in \tilde{\Sigma}^+$  .

Más aún, por la convergencia  $C^1$  , tenemos que existe el límite de  $s_n = \frac{V_n'(0)}{U_n'(0)}$

y en efecto es  $\frac{V_0'(0)}{U_0'(0)}$  . Así tenemos que  $s_n \rightarrow s_0$  , y con ello queda demostrada la primera parte del lema.

Para terminar, observamos que  $(U_n(x), V_n(x)) = (u_n(x), v_n(x))U'_n(0)$  y  $U'_n(0)$  es una sucesión no nula y acotada; esto implica que si la sucesión  $(u_n, v_n)$  está formada por funciones todas ellas con el mismo número de ceros simples, entonces lo mismo ocurre con la sucesión  $(U_n, V_n)$  y, debido a la convergencia  $C^1$ , también con  $(U_0, V_0)$ .

2) Ahora vemos el caso Neumann.

Por hipótesis tenemos que las correspondientes soluciones no triviales verifican el PVI

$$\begin{cases} -u''_n = \lambda_n^+ v_n^+ - \lambda_n^- v_n^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v''_n = \lambda_n^+ u_n^+ - \mu_n^- u_n^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u_n(0), v_n(0), u'_n(0), v'_n(0)) = (1, s_n, 0, 0) \end{cases} \quad (5.51)$$

y  $u'_n(1) = v'_n(1) = 0$ .

Haciendo  $(U_n, V_n) = \frac{1}{\|(u_n, v_n)\|_{H^2 \times H^2}}(u_n, v_n)$ , tenemos que existe una sub-sucesión, que seguiremos denotando  $(U_n, V_n)$ , tal que  $(U_n, V_n) \rightharpoonup (U_0, V_0)$  (converge débilmente) en  $H^2(0, 1) \times H^2(0, 1)$  y  $(U_n, V_n) \rightarrow (U_0, V_0)$  (converge fuertemente) en  $C^1[0, 1] \times C^1[0, 1]$ . También se verifica

$$\begin{cases} -U''_n = \lambda_n^+ V_n^+ - \lambda_n^- V_n^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -V''_n = \lambda_n^+ U_n^+ - \mu_n^- U_n^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (U_n(0), V_n(0), U'_n(0), V'_n(0)) = \left(\frac{1}{r_n}, \frac{s_n}{r_n}, 0, 0\right) \end{cases} \quad (5.52)$$

y  $U'_n(1) = V'_n(1) = 0$ , con  $r_n = \|(u_n, v_n)\|_{H^2 \times H^2}$  y  $s_n = \frac{V_n(0)}{U_n(0)}$ .

Análogamente al caso Dirichlet, se obtiene la ecuación variacional para  $(U_n, V_n)$

$$-\int_0^1 (U_n \phi'' + V_n \psi'') = \int_0^1 (\lambda_n^+ V_n^+ - \lambda_n^- V_n^-) \phi + (\lambda_n^+ U_n^+ - \mu_n^- U_n^-) \psi, \quad (5.53)$$

$\forall \phi, \psi \in H_0^1(0, 1)$ .

Y tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , resulta

$$-\int_0^1 (U_0 \phi'' + V_0 \psi'') = \int_0^1 (\lambda_0^+ V_0^+ - \lambda_0^- V_0^-) \phi + (\lambda_0^+ U_0^+ - \mu_0^- U_0^-) \psi, \quad (5.54)$$

$\forall \phi, \psi \in H_0^1(0, 1)$ , es decir  $(U_0, V_0)$  es una solución de (3.1) con coeficientes  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-)$ . Veamos que es una solución no trivial.

Por el Lema 3.1,  $(U_n, V_n)$  también es solución fuerte y tenemos

$$\int_0^1 (-U''_n + U''_0)^2 = \int_0^1 [(\lambda_n^+ V_n^+ - \lambda_n^- V_n^-) - (\lambda_0^+ V_0^+ - \lambda_0^- V_0^-)]^2 \quad y \quad (5.55)$$

$$\int_0^1 (-V_n'' + V_0'')^2 = \int_0^1 [(\lambda_n^+ U_n^+ - \lambda_n^- U_n^-) - (\lambda_0^+ U_0^+ - \lambda_0^- U_0^-)]^2, \quad (5.56)$$

donde, usando la convergencia  $(\lambda_n^+, \lambda_n^-, \mu_n^-) \rightarrow (\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-)$ , los lados derechos convergen a cero y por ello  $U_n \rightarrow U_0$  y  $V_n \rightarrow V_0$  fuertemente en  $H^2$ . Así tenemos que  $\|(U_0, V_0)\|_{H^2 \times H^2} = 1$  y  $(U_0, V_0)$  es una solución no trivial de (3.1).

Ahora, como  $U_n(0)$  converge a  $U_0(0)$  y  $U_n(0) = \frac{1}{r_n} > 0$  tenemos que  $U_0(0) > 0$ . Al ser  $U_0'(0) = 0$ , por el Lema 4.1 tenemos que  $V_0(0) > 0$ . Entonces  $(\frac{U_0}{U_0(0)}, \frac{V_0}{U_0(0)})$  es solución del PVI (5.1) con condiciones iniciales  $(1, s_0, 0, 0)$  donde  $s_0 = \frac{V_0(0)}{U_0(0)}$ , y además  $\frac{U_0}{U_0(0)}(1) = \frac{V_0}{U_0(0)}(1) = 0$ . Luego  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, \frac{V_0(0)}{U_0(0)}) \in \tilde{\Sigma}^+$  y como  $s_n = \frac{V_n(0)}{U_n(0)}$  converge a  $\frac{V_0(0)}{U_0(0)}$ , tenemos que  $s_n \rightarrow s_0$ .

Finalmente, al ser  $(U_n(x), V_n(x)) = (u_n(x), v_n(x))U_n(0)$  y  $U_n(0)$  una sucesión no nula y acotada, resulta que si  $(u_n, v_n)$  está formada por funciones todas ellas con el mismo número de ceros simples, esta propiedad también se mantiene para  $(U_n, V_n)$  y para  $(U_0, V_0)$ . ■

**Corolario 5.1** *El conjunto  $\hat{\Sigma}^+$  es cerrado.*

**Demostración.-** Sea la sucesión  $\{(\lambda_n^+, \lambda_n^-, \mu_n^-)\} \subset \hat{\Sigma}^+$  tal que  $(\lambda_n^+, \lambda_n^-, \mu_n^-)$  converge a  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-)$ . Por definición de  $\hat{\Sigma}^+$ , sabemos que existe una sucesión  $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$  tal que  $\{(\lambda_n^+, \lambda_n^-, \mu_n^-, s_n)\} \subset \tilde{\Sigma}^+$ . Luego, por el Lema 5.4, existe una subsucesión convergente de  $\{s_n\}$ , digamos  $s_n \rightarrow s_0$ , tal que  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ , es decir  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-) \in \hat{\Sigma}^+$ , con lo cual se tiene el resultado. ■

El siguiente resultado nos dará una descripción cualitativa del conjunto  $\tilde{\Sigma}^+$ .

**Proposición 5.1** *Sea  $C$  una componente conexa de  $\tilde{\Sigma}^+$  tal que las correspondientes soluciones no triviales cambian de signo. Entonces existe un conjunto abierto conexo  $\Lambda \subseteq \{(\lambda^-, \mu^-) : \lambda^- > 0, \mu^- > 0\}$  tal que  $C$  es de la forma*

$$C = \{(\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), \lambda^-, \mu^-), s(\lambda^-, \mu^-)) : \lambda^-, \mu^- \in \Lambda\}$$

*y se verifican*

1.  $(\lambda^+, s) : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$  es una función  $C^1$  de  $\lambda^-, \mu^-$ , y para cualquier  $(\lambda^-, \mu^-) \in \Lambda$

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda^-, \mu^-) < 0, \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda^-, \mu^-) < 0. \quad (5.58)$$

2. Las correspondientes soluciones no triviales de (3.1) tienen el mismo número de ceros, todos simples)

3. Existe un único  $(\lambda_*, \mu_*) \in \Lambda$  tal que  $\lambda^+(\lambda_*, \mu_*) = \lambda_*^- = \mu_*^-$  y  $\lambda_*^- = \mu_*^- = \lambda_k$  para algún  $k \geq 2$ .

### **Demostración.-**

1. Por el Lema 5.3 tenemos que para cada  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0) \in C$ : existe  $\varepsilon > 0$  y

$$(\lambda^+, s) : I_{\lambda_0^-} \times I_{\mu_0^-} = \langle \lambda_0^- - \varepsilon, \lambda_0^- + \varepsilon \rangle \times \langle \mu_0^- - \varepsilon, \mu_0^- + \varepsilon \rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que  $(\lambda^+, s)$  es de clase  $C^1$  y

$$(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0) = (\lambda^+(\lambda_0^-, \mu_0^-), \lambda_0^-, \mu_0^-, s(\lambda_0^-, \mu_0^-)).$$

Además

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\lambda_0^-, \mu_0^-) < 0.$$

Con esto definimos la función

$$(\bar{\lambda}^+, \bar{s}) : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\lambda^-, \mu^-) \mapsto (\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), s(\lambda^-, \mu^-))$$

donde

$$\Lambda = \bigcup_{(\lambda^-, \mu^-) \in \tilde{C}} I_{\lambda^-} \times I_{\mu^-} \quad \text{y} \quad \tilde{C} = \{(\lambda^-, \mu^-) : (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in C\}.$$

Así

$$C = \{(\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), \lambda^-, \mu^-, s(\lambda^-, \mu^-)) : (\lambda^-, \mu^-) \in \Lambda\}.$$

Observamos que el conjunto  $\Lambda$  así definido es abierto y conexo; en caso contrario sería unión disjunta de abiertos y su imagen por  $(\bar{\lambda}^+, \bar{s})$  también sería unión disjunta de abiertos y entonces  $C$  no sería conexo.

Además, para cada  $(\lambda^-, \mu^-) \in \Lambda$  se verifican (5.57) y (5.58), y de la segunda parte de las Proposiciones 3.1, 3.2, tenemos que  $\lambda^-, \mu^-$  y  $\lambda^+(\lambda^-, \mu^-)$  son estrictamente positivos.

2. El resultado sigue del Lema 5.3.



3. Primero vemos dos propiedades:

i) Si existe

$$\lim_{(\lambda^-, \mu^-) \rightarrow (\lambda_0^-, \mu_0^-)} \lambda^+(\lambda^-, \mu^-) = \lambda_0^+ < +\infty,$$

por el Lema 5.4, existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $(\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), \lambda^-, \mu^-), s(\lambda^-, \mu^-))$  converge a  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0)$  y como el conjunto  $C$  es cerrado, resulta que  $(\lambda_0^+, \lambda_0^-, \mu_0^-, s_0) \in C$ . Luego, por el Lema 5.3,  $(\lambda_0^-, \mu_0^-)$  es un punto interior de  $\Lambda$ .

ii) Para  $\tilde{\lambda}^-$  fijo, la variable  $\mu^-$  toma valores en un subconjunto abierto de  $\langle 0, +\infty \rangle$  y la función  $\lambda^+(\tilde{\lambda}^-, \mu^-)$  es positiva y decreciente en  $\mu^-$ . Por ello el límite

$$\lim_{\mu^- \rightarrow +\infty} \lambda^+(\tilde{\lambda}^-, \mu^-)$$

es no negativo. Análogamente, también es no negativo el límite

$$\lim_{\lambda^- \rightarrow +\infty} \lambda^+(\lambda^-, \mu^-).$$

Ahora, consideramos la semirrecta  $L = \{(\lambda^-, \mu^-) : \lambda^- = \mu^- > 0\}$  y observamos que  $L \cap \Lambda \neq \emptyset$ . Como la función  $\lambda^+$  es  $C^1(\Lambda)$ , por (5.57) y (5.58) tenemos que es decreciente en todo  $L$ , y con las propiedades i) y ii) deducimos que tiene límite no negativo cuando  $\lambda^- = \mu^- \rightarrow +\infty$  y una asíntota cuando  $L$  se aproxima a la frontera de  $\Lambda$ . Esto implica que existe un único punto  $\xi$  donde  $\lambda^+(\xi, \xi) = \xi$ . Así, para este valor  $\lambda^+ = \lambda^- = \mu^- = \xi$ , el problema (3.1) se reduce a (3.3) y por tanto  $\xi$  es un autovalor del sistema acoplado. Más aún, como su correspondiente autofunción cambia de signo,  $\xi \neq \lambda_1$ . Luego  $\xi = \lambda_k$  para algún  $k \geq 2$ . ■

Ahora ya podemos caracterizar todas las componentes conexas de  $\widehat{\Sigma}$ . Concretamente, como ya conocemos el espectro del sistema acoplado, usando la tercera propiedad de la Proposición 5.1 obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 5.2** *Existe una relación uno a uno entre los autovalores  $\{\lambda_k\}_{k \geq 2}$  de  $-\frac{d^2}{dx^2}$  y aquellas componentes conexas de  $\widehat{\Sigma}^+$  (respectivamente  $\widehat{\Sigma}^-$ ) que corresponden a soluciones no triviales que cambian de signo.*

**Demostración.-**

i) Sea  $\lambda_k$  un autovalor de  $-\frac{d^2}{dx^2}$  y  $\phi_k$  su respectiva autofunción que cambia de signo. Entonces  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$  y  $(u, v) = (\phi_k, \phi_k)$  es la correspondiente solución no trivial de (3.1). Luego, para el caso Dirichlet tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{\phi_k''}{|\phi_k'(0)|} &= \lambda_k \frac{\phi_k^+}{|\phi_k'(0)|} - \lambda_k \frac{\phi_k^-}{|\phi_k'(0)|} \\
-\frac{\phi_k''}{|\phi_k'(0)|} &= \lambda_k \frac{\phi_k^+}{|\phi_k'(0)|} - \lambda_k \frac{\phi_k^-}{|\phi_k'(0)|} \\
\left( \frac{\phi_k}{|\phi_k'(0)|}, \frac{\phi_k}{|\phi_k'(0)|}, \frac{\phi_k'}{|\phi_k'(0)|}, \frac{\phi_k'}{|\phi_k'(0)|} \right)(0) &= (0, 0, \pm 1, \pm 1) \text{ y } \frac{\phi_k(1)}{|\phi_k'(0)|} = \frac{\phi_k(1)}{|\phi_k'(0)|} = 0.
\end{aligned}$$

Y para el caso Neumann

$$\begin{aligned}
-\frac{\phi_k''}{|\phi_k(0)|} &= \lambda_k \frac{\phi_k^+}{|\phi_k(0)|} - \lambda_k \frac{\phi_k^-}{|\phi_k(0)|} \\
-\frac{\phi_k''}{|\phi_k(0)|} &= \lambda_k \frac{\phi_k^+}{|\phi_k(0)|} - \lambda_k \frac{\phi_k^-}{|\phi_k(0)|} \\
\left( \frac{\phi_k}{|\phi_k(0)|}, \frac{\phi_k}{|\phi_k(0)|}, \frac{\phi_k'}{|\phi_k(0)|}, \frac{\phi_k'}{|\phi_k(0)|} \right)(0) &= (\pm 1, \pm 1, 0, 0) \text{ y } \frac{\phi_k'(1)}{|\phi_k(0)|} = \frac{\phi_k'(1)}{|\phi_k(0)|} = 0.
\end{aligned}$$

De esta manera, existe un único valor de  $s$  (específicamente  $s = 1$ ) tal que  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k, s) \in \tilde{\Sigma}^+$  y por el Lema 5.3 tenemos que por este punto pasa una componente conexa de  $\tilde{\Sigma}^+$ ; también existe un único valor  $s = -1$  tal que el punto  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k, s) \in \tilde{\Sigma}^-$  y por este punto pasa una componente conexa de  $\tilde{\Sigma}^-$ .

- ii) Por la tercera propiedad de la Proposición 5.1, tenemos que cualquier componente conexa  $C$  de  $\tilde{\Sigma}^+$  (y de  $\tilde{\Sigma}^-$ ) pasa por un punto de la forma  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k, s)$  para algún  $k \geq 2$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

De i) y ii) se tiene la relación uno a uno que afirma la proposición. ■

**Definición 5.1** En lo que sigue del trabajo usaremos la notación  $\tilde{\Sigma}_k^+$  (respectivamente  $\tilde{\Sigma}_k^-$ ) para la componente conexa de  $\tilde{\Sigma}^+$  (respectivamente  $\tilde{\Sigma}^-$ ) correspondiente a  $\lambda_k$ . Asimismo, denotaremos con  $\hat{\Sigma}_k^+$  (respectivamente  $\hat{\Sigma}_k^-$ ) a la proyección de  $\tilde{\Sigma}_k^+$  (respectivamente  $\tilde{\Sigma}_k^-$ ) en  $\{(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3\}$ .

Como una consecuencia de la proposición 5.2 tenemos el siguiente resultado

**Corolario 5.2** Por cualquier punto  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \hat{\Sigma}$ , con  $k \geq 2$ , pasan exactamente dos superficies en  $\hat{\Sigma}_{nt}$ , específicamente  $\hat{\Sigma}_k^+$  y  $\hat{\Sigma}_k^-$ . En particular, tal como ocurre con la autofunción correspondiente a  $\lambda_k$ , las soluciones no triviales correspondientes a un punto en  $\hat{\Sigma}_k^\pm$  siempre tienen  $k - 1$  ceros interiores en  $\langle 0, 1 \rangle$ . Más aún, cualquier punto en  $\hat{\Sigma}_{nt}$  pertenece a una de estas superficies.

**Demostración.-** Sea  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$ , con  $k \geq 2$ . De la proposición 5.2 tenemos que

$$(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k, 1) \in \widetilde{\Sigma}_k^+ \quad \text{y} \quad (\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k, -1) \in \widetilde{\Sigma}_k^-;$$

En consecuencia

$$(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}_k^+ \quad \text{y} \quad (\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}_k^-.$$

Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ , entonces existen  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  tales que

$$(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s_1) \in \widetilde{\Sigma}^+ \quad \text{ó} \quad (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s_2) \in \widetilde{\Sigma}^-,$$

por lo cual existen  $k_1, k_2 \geq 2$  tales que

$$(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s_1) \in \widetilde{\Sigma}_{k_1}^+ \quad \text{ó} \quad (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s_2) \in \widetilde{\Sigma}_{k_2}^-.$$

Por tanto

$$(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{k_1}^+ \quad \text{ó} \quad (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{k_2}^-.$$

Además, al pertenecer  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$  a una componente conexa relacionada a un autovalor  $\lambda_k$ , las correspondientes autofunciones tienen el mismo número de ceros que aquellas correspondientes a  $\lambda_k$ , es decir también tienen  $k - 1$  ceros simples. ■

Ahora podemos completar el resultado del Lema 3.4 acerca de la relación entre el espectro de Fucik  $\widehat{\Sigma}$  para el sistema acoplado en estudio y el espectro de Fucik  $\Sigma_{escal}$  para el caso escalar. Así Tenemos la siguiente

**Proposición 5.3** *Existe una biyección entre  $\Sigma_{escal}$  y el subconjunto de  $\widehat{\Sigma}$  con  $\lambda^- = \mu^-$ . En particular, si  $u$  es solución no trivial del problema escalar (2.1) correspondiente a un punto  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_{escal}$ , entonces el par  $(u, u)$  es una solución no trivial del problema (3.1) correspondiente al punto  $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}$  y viceversa.*

**Demostración.-** Hacemos la prueba en tres etapas.

- i) Para  $\lambda^+ = \lambda_1$  o  $\lambda^- = \mu^- = \lambda_1$  el resultado es inmediato, pues se conoce explícitamente  $\widehat{\Sigma}_t$ , véase la tercera parte de Propociones 3.1, 3.2.
- ii) Sea  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_{escal}$  tal que la correspondiente solución no trivial  $\phi$  de (2.1) cambia de signo. Entonces  $(\phi, \phi)$  es solución no trivial de

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases}$$

es decir,  $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ . Luego, a cada punto en  $\Sigma_{escal} - \{(\lambda_1, \lambda_1)\}$  le corresponde un punto en  $\widehat{\Sigma}_{nt}$  con  $\lambda^- = \mu^-$ .

iii) Ahora veamos que la relación dada en ii) es una biyección. En efecto, sea  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con  $\lambda^- = \mu^-$ . Por el Corolario 5.2, existe  $k \geq 2$  tal que

$$(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+ \quad \text{o} \quad (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^-.$$

Como las curvas en el espectro de Fucik escalar también se pueden identificar con el número de ceros y el signo que tienen las respectivas soluciones no triviales cerca de 0, entonces cada superficie  $\widetilde{\Sigma}_k^+$  (respectivamente  $\widetilde{\Sigma}_k^-$ ) contiene a la correspondiente curva  $\Sigma_k^+$  (respectivamente  $\Sigma_k^-$ ) de  $\Sigma_{escal}$ . Más aún, en vista de que cada superficie puede expresarse como una función de las variables  $\lambda^-, \mu^-$ , entonces cada superficie  $\widetilde{\Sigma}_k^+$  (respectivamente  $\widetilde{\Sigma}_k^-$ ) contiene una única curva con  $\lambda^- = \mu^-$ . Por tanto,

$$(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_k^+ \quad \text{o} \quad (\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_k^-,$$

es decir,  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_{escal} - \{\lambda^+ = \lambda_1, \lambda^- = \lambda_1\}$ . ■

**Observación 5.2** *En el Lema 3.4 solo se pudo decir que  $\Sigma_{escal}$  está contenido en el subconjunto de  $\widehat{\Sigma}$  con  $\lambda^- = \mu^-$ ; ahora podemos decir que el recíproco también es verdadero, es decir, siempre que  $\lambda^- = \mu^-$  en  $\widehat{\Sigma}$  la correspondiente solución no trivial está compuesta por un par de funciones que son soluciones no triviales del problema de Fucik escalar con coeficientes  $(\lambda^+, \lambda^-)$ .*

Esta inmersión de  $\Sigma_{escal}$  en  $\widehat{\Sigma}$  nos da aún más información sobre la estructura de  $\widehat{\Sigma}$ . Combinando lo que sabemos de  $\Sigma_{escal}$  con las simetrías del lema 3.3 y el resultado de monotonía en la primera parte de la Proposición 5.1, obtenemos la siguiente proposición.

**Proposición 5.4** *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *En el caso Dirichlet*

- Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  con  $k \geq 2$ , entonces

$$\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_{\lfloor k/2 \rfloor} \quad \text{y} \quad \lambda^+ > \lambda_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \quad (5.59)$$

- Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^-$  con  $k \geq 2$ , entonces

$$\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \quad \text{y} \quad \lambda^+ > \lambda_{\lfloor k/2 \rfloor} \quad (5.60)$$

2. *En el caso Neumann*

- Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^\pm$  con  $k \geq 2$ , entonces

$$\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \frac{1}{4} \lambda_k \quad \text{y} \quad \lambda^+ > \frac{1}{4} \lambda_k. \quad (5.61)$$

**Demostración.-** Empezamos la prueba, observando que las desigualdades del resultado son exactamente las mismas que se verifican para las curvas correspondientes en  $\Sigma_{escal}$  (ver observaciones 2.1 y 2.2) , y por ello el resultado es inmediato si restringimos a los puntos con  $\lambda^- = \mu^-$  .

Ahora vemos la prueba para cualquier  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$  . Primero veamos que se verifican las desigualdades para  $\lambda^+$  . En efecto, de la primera parte de la Proposición 5.1, sabemos que  $\lambda^+$  es decreciente en ambas variables  $\lambda^-$  y  $\mu^-$  ; por ello  $\lambda^+$  no puede tomar un valor inferior a aquellos cuando  $\lambda^- = \mu^-$  , es decir, para el caso Dirichlet

$$\lambda^+ > \lambda_{\llbracket (k+1)/2 \rrbracket}, \quad \text{si } (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+ \quad \text{con } k \geq 2 ,$$

$$\lambda^+ > \lambda_{\llbracket k/2 \rrbracket}, \quad \text{si } (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^- \quad \text{con } k \geq 2 ,$$

y para el caso Neumann

$$\lambda^+ > \frac{1}{4} \lambda_k, \quad \text{si } (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^\pm .$$

Finalmente, veamos que se verifican las desigualdades para  $\sqrt{\lambda^- \mu^-}$  .

En efecto, por la segunda propiedad de simetría dada en el Lema 3.3, tenemos que  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^\pm$  implica  $(\sqrt{\lambda^- \mu^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}) \in \widehat{\Sigma}_k^\mp$  , es decir cambia el signo de las soluciones no triviales y los valores para  $\widehat{\Sigma}_k^+$  pasan a  $\widehat{\Sigma}_k^-$  y viceversa. Luego,

Para el caso Dirichlet:

- Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  , entonces  $(\sqrt{\lambda^- \mu^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}) \in \widehat{\Sigma}_k^-$  . Y por la parte anterior  $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_{\llbracket k/2 \rrbracket}$  .
- Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^-$  , entonces  $(\sqrt{\lambda^- \mu^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  . Luego, por la parte anterior,  $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_{\llbracket (k+1)/2 \rrbracket}$  ; y

Para el caso Neumann:

- Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^\pm$  , entonces  $(\sqrt{\lambda^- \mu^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}) \in \widehat{\Sigma}_k^\mp$  y de ahí que  $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \frac{1}{4} \lambda_k$  . ■

## Capítulo 6

# Intersecciones entre las superficies del espectro de Fucik del sistema acoplado

En este capítulo veremos dos resultados sobre las posibles intersecciones entre las superficies de Fucik  $\widehat{\Sigma}_k^\pm$ . Demostraremos que aquellas superficies que corresponden a soluciones no triviales con diferente número de ceros, no se intersecan; y que aquellas superficies correspondientes a soluciones no triviales con el mismo número de ceros, pueden coincidir o contener una curva en su intersección.

Empezamos probando el siguientes resultado.

**Proposición 6.1** *Si  $h > k \geq 2$ , entonces  $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cup \widehat{\Sigma}_k^-) \cap (\widehat{\Sigma}_h^+ \cup \widehat{\Sigma}_h^-) = \emptyset$ . Más aún,  $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cup \widehat{\Sigma}_k^-) \cap \widehat{\Sigma}_t = \emptyset$ .*

**Demostración.-** Sea la función  $\lambda^+(\lambda^-, \mu^-)$  que describe  $\widehat{\Sigma}_k^+$  (o  $\widehat{\Sigma}_k^-$ ). Entonces  $\lambda^+(\lambda_k, \lambda_k) = \lambda_k$  y como es decreciente en ambas variables, tenemos que

$$\lambda^+(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+1}) < \lambda^+(\lambda_k, \lambda_k) = \lambda_k < \lambda_{k+1}.$$

Por ello, en  $\lambda^- = \mu^- = \lambda_{k+1}$  las superficies  $\widehat{\Sigma}_k^\pm$  son inferiores a las superficies  $\widehat{\Sigma}_{k+1}^\pm$ . Así, para obtener el resultado, basta demostrar que

$$(\widehat{\Sigma}_k^+ \cup \widehat{\Sigma}_k^-) \cap (\widehat{\Sigma}_{k+1}^+ \cup \widehat{\Sigma}_{k+1}^-) = \emptyset.$$

Haremos la prueba por contradicción. Supongamos

$$(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in (\widehat{\Sigma}_k^+ \cup \widehat{\Sigma}_k^-) \cap (\widehat{\Sigma}_{k+1}^+ \cup \widehat{\Sigma}_{k+1}^-).$$

Entonces las correspondientes soluciones no triviales  $(u_k, v_k)$  y  $(u_{k+1}, v_{k+1})$  verifican

$$\begin{cases} -u_k'' = \lambda^+ v_k^+ - \lambda^- v_k^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v_k'' = \lambda^+ u_k^+ - \mu^- u_k^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu_k = Bv_k = 0 & \text{en } \{0, 1\} \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -u_{k+1}'' = \lambda^+ v_{k+1}^+ - \lambda^- v_{k+1}^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v_{k+1}'' = \lambda^+ u_{k+1}^+ - \mu^- u_{k+1}^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu_{k+1} = Bv_{k+1} = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases}$$

respectivamente. Las funciones  $(u_{k+1}, v_{k+1})$  cambian de signo una vez más que las funciones  $(u_k, v_k)$  y, por tanto, en uno de los extremos del intervalo (supongamos 0) tienen el mismo signo y podemos elegir un reescalamiento tal que

$$u_k(0) = u_{k+1}(0), \quad u_k'(0) = u_{k+1}'(0), \quad v_k(0) = v_{k+1}(0), \quad v_k'(0) = v_{k+1}'(0); \quad (6.1)$$

Por ejemplo, para el caso Dirichlet podemos considerar el reescalamiento

$$\begin{aligned} \bar{u}_k &= u_{k+1}'(0)u_k \quad y \quad \bar{u}_{k+1} = u_k'(0)u_{k+1} \\ \bar{v}_k &= v_{k+1}'(0)v_k \quad y \quad \bar{v}_{k+1} = v_k'(0)v_{k+1}, \end{aligned}$$

y para el caso Neumann, el reescalamiento

$$\begin{aligned} \bar{u}_k &= u_{k+1}(0)u_k \quad y \quad \bar{u}_{k+1} = u_k(0)u_{k+1} \\ \bar{v}_k &= v_{k+1}(0)v_k \quad y \quad \bar{v}_{k+1} = v_k(0)v_{k+1}. \end{aligned}$$

Ahora definimos  $Y = u_k - u_{k+1}$ ,  $Z = v_k - v_{k+1}$  y las funciones positivas

$$\begin{aligned} c_{u1}(x) &= \frac{\lambda^+ u_k^+ + \mu^- u_{k+1}^-}{u_k^+ + u_{k+1}^-} \mathcal{X}_{u+-}(x), \\ c_{u2}(x) &= \frac{-\mu^- u_k^- - \lambda^+ u_{k+1}^+}{-u_k^- - u_{k+1}^+} \mathcal{X}_{u-+}(x), \\ c_{v1}(x) &= \frac{\lambda^+ v_k^+ + \lambda^- v_{k+1}^-}{v_k^+ + v_{k+1}^-} \mathcal{X}_{v+-}(x), \quad y \\ c_{v2}(x) &= \frac{-\lambda^- v_k^- - \lambda^+ v_{k+1}^+}{-v_k^- - v_{k+1}^+} \mathcal{X}_{v-+}(x). \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{X}_{u\pm\pm}(x) = \mathcal{X}_{\{\pm u_k > 0 \wedge \pm u_{k+1} > 0\}}(x)$ . Con esto tenemos la siguiente

**Afirmación:** Las funciones  $Y, Z$  verifican

$$\begin{cases} -Y'' = [\lambda^+ \mathcal{X}_{v++}(x) + c_{v1}(x) \mathcal{X}_{v+-}(x) + c_{v2}(x) \mathcal{X}_{v-+}(x) + \lambda^- \mathcal{X}_{v--}(x)] Z & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ -Z'' = [\lambda^+ \mathcal{X}_{u++}(x) + c_{u1}(x) \mathcal{X}_{u+-}(x) + c_{u2}(x) \mathcal{X}_{u-+}(x) + \mu^- \mathcal{X}_{u--}(x)] Y & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ BY = BZ = 0 & \text{en } \{0, 1\} . \end{cases}$$

En efecto, usando las propiedades

$$u > 0 \Leftrightarrow [(u^+ = u) \wedge (u^- = 0)] \quad \text{y} \quad u < 0 \Leftrightarrow [(u^+ = 0) \wedge (u^- = -u)]$$

y dividiendo el intervalo  $\langle 0, 1 \rangle$  en los dominios correspondientes, tenemos

- En  $\{x \in \langle 0, 1 \rangle : v_k(x) > 0 \wedge v_{k+1}(x) > 0\}$  :

$$\begin{aligned} \lambda^+ \mathcal{X}_{v++}(x) Z &= \lambda^+ \mathcal{X}_{v++}(x) (v_k - v_{k+1}) \\ &= \lambda^+ (v_k^+ - v_{k+1}^+) \\ &= (\lambda^+ v_k^+ - \underbrace{\lambda^- v_k^-}_{=0}) - (\lambda^+ v_{k+1}^+ - \underbrace{\lambda^- v_{k+1}^-}_{=0}) \\ &= (-u_k'') - (-u_{k+1}'') = -Y'' . \end{aligned} \tag{6.2}$$

- En  $\{x \in \langle 0, 1 \rangle : v_k(x) > 0 \wedge v_{k+1}(x) < 0\}$  :

$$\begin{aligned} c_{v1}(x) \mathcal{X}_{v+-}(x) Z &= c_{v1}(x) \mathcal{X}_{v+-}(x) (v_k - v_{k+1}) \\ &= \frac{\lambda^+ v_k^+ + \lambda^- v_{k+1}^-}{v_k^+ + v_{k+1}^-} (v_k^+ + v_{k+1}^-) \\ &= (\lambda^+ v_k^+ - \underbrace{\lambda^- v_k^-}_{=0}) - (\lambda^+ \underbrace{v_{k+1}^+}_{=0} - \lambda^- v_{k+1}^-) \\ &= (-u_k'') - (-u_{k+1}'') = -Y'' . \end{aligned} \tag{6.3}$$

- En  $\{x \in \langle 0, 1 \rangle : v_k(x) < 0 \wedge v_{k+1}(x) > 0\}$  :

$$\begin{aligned} c_{v2}(x) \mathcal{X}_{v-+}(x) Z &= c_{v2}(x) \mathcal{X}_{v-+}(x) (v_k - v_{k+1}) \\ &= \frac{-\lambda^- v_k^- - \lambda^+ v_{k+1}^+}{-v_k^- - v_{k+1}^+} (-v_k^- - v_{k+1}^+) \\ &= (\lambda^+ \underbrace{v_k^+}_{=0} - \lambda^- v_k^-) - (\lambda^+ v_{k+1}^+ - \lambda^- \underbrace{v_{k+1}^-}_{=0}) \\ &= (-u_k'') - (-u_{k+1}'') = -Y'' . \end{aligned} \tag{6.4}$$



- En  $\{x \in \langle 0, 1 \rangle : v_k(x) < 0 \wedge v_{k+1}(x) < 0\}$  :

$$\begin{aligned}
\lambda^- \mathcal{X}_{v--}(x)Z &= \lambda^- \mathcal{X}_{v--}(x) (-v_k^- + v_{k+1}^-) \\
&= \lambda^- (-v_k^- + v_{k+1}^-) \\
&= (\lambda^+ \underbrace{v_k^+}_{=0} - \lambda^- v_k^-) - (\lambda^+ \underbrace{v_{k+1}^+}_{=0} - \lambda^- v_{k+1}^-) \quad (6.5) \\
&= (-v_k^- + v_{k+1}^-) = -Y'' .
\end{aligned}$$

Así, de (6.2)-(6.5), tenemos

$$-Y'' = [\lambda^+ \mathcal{X}_{v++}(x) + c_{v1}(x) \mathcal{X}_{v+-}(x) + c_{v2}(x) \mathcal{X}_{v-+}(x) + \lambda^- \mathcal{X}_{v--}(x)] Z \quad \text{en } \langle 0, 1 \rangle .$$

Análogamente se prueba

$$-Z'' = [\lambda^+ \mathcal{X}_{u++}(x) + c_{u1}(x) \mathcal{X}_{u+-}(x) + c_{u2}(x) \mathcal{X}_{u-+}(x) + \mu^- \mathcal{X}_{u--}(x)] Y \quad \text{en } \langle 0, 1 \rangle$$

y las condiciones de frontera  $BY = BZ = 0$  en  $\{0, 1\}$  se verifican en forma inmediata. Con todo esto tenemos la afirmación demostrada.

Como las funciones que aparecen entre corchetes son  $L^\infty$  y positivas en casi todo punto y de (6.1) resulta

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 0 ,$$

entonces por el Lema 4.1, concluimos que  $Y \equiv Z \equiv 0$ . Esto es una contradicción pues en una vecindad de 1 los signos de  $u_k$  y  $u_{k+1}$  (también los de  $v_k$  y  $v_{k+1}$ ) son diferentes y por tanto  $Y \neq 0$  (también  $Z \neq 0$ ). Luego

$$(\widehat{\Sigma}_k^+ \cup \widehat{\Sigma}_k^-) \cap (\widehat{\Sigma}_{k+1}^+ \cup \widehat{\Sigma}_{k+1}^-) = \emptyset .$$

Similarmente y usando el mismo argumento se demuestra que  $(\widehat{\Sigma}_2^+ \cup \widehat{\Sigma}_2^-) \cap \widehat{\Sigma}_t = \emptyset$ . En efecto, si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in (\widehat{\Sigma}_2^+ \cup \widehat{\Sigma}_2^-) \cap \widehat{\Sigma}_t$ , basta considerar las soluciones correspondientes  $(u_1, v_1)$  que no cambian de signo y  $(u_2, v_2)$  que cambian de signo una vez, y reemplazándolas en toda la prueba anterior por  $(u_k, v_k)$  y  $(u_{k+1}, v_{k+1})$ , respectivamente, llegamos a una contradicción, y con ello

$$(\widehat{\Sigma}_k^+ \cup \widehat{\Sigma}_k^-) \cap \widehat{\Sigma}_t = \emptyset \quad , \quad \forall k \geq 2 . \quad \blacksquare$$

**Observación 6.1** En la demostración anterior, si el punto donde las soluciones tienen el mismo signo fuera 1, la contradicción se daría por el hecho que las funciones  $u_k$  y  $u_{k+1}$  tienen signos diferentes en una vecindad de 0.

Ahora nos proponemos estudiar en qué casos las superficies  $\widehat{\Sigma}_k^+$  y  $\widehat{\Sigma}_k^-$  coinciden o no. Para ello, en especial para el caso Neumann, necesitamos algunas propiedades de simetría de las soluciones no triviales, las cuales enunciamos en la siguiente Proposición.

**Proposición 6.2** *Las soluciones no triviales correspondientes a los puntos en  $\widehat{\Sigma}_k^\pm$  con  $k$  impar, son simétricas, es decir*

$$(u, v)(x) = (u, v)(1 - x) . \quad (6.6)$$

Más aún, para el caso Neumann, si  $j \geq 0$  y  $k \equiv 1 \pmod{2^{j+1}}$ , entonces

$$(u, v)(x) = (u, v)((1/2)^j - x) \quad \text{para } x \in [0, (1/2)^j], \quad (6.7)$$

con lo cual  $u, v$  son  $(1/2)^j$  periódicas en  $[0, 1]$ .

**Demostración.-**

1° Veamos la prueba de (6.6).

Sea  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  con  $k$  impar y  $(u_*, v_*)$  la respectiva solución no trivial de (3.1). Puesto que el número de ceros es  $(k - 1)$  (par), ambas  $u$  y  $v$  empiezan y terminan positivas. Definimos

$$(U, V)(x) = (u_*(1 - x), v_*(1 - x))$$

y observamos que  $U$  y  $V$  también empiezan y terminan positivas y tienen  $(k - 1)$  ceros (por ejemplo si  $r_i$  es cero de  $u_*$ , entonces  $(1 - r_i)$  es cero de  $U$  y recíprocamente).

**Afirmación:**  $(U, V)$  es solución de (3.1) con coeficientes  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$ .

En efecto, al ser  $u_*$  solución de (3.1), tenemos que se cumple

$$\begin{cases} -u_*''(1 - x) = \lambda^+ v_*^+(1 - x) - \lambda^- v_*^-(1 - x) , \\ -v_*''(1 - x) = \lambda^+ u_*^+(1 - x) - \mu^- u_*^-(1 - x) . \end{cases}$$

Y como

$$U''(x) = u_*''(1 - x), \quad V''(x) = v_*''(1 - x),$$

tenemos

$$\begin{cases} -U''(x) = \lambda^+ V^+(x) - \lambda^- V^-(x) , \\ -V''(x) = \lambda^+ U^+(x) - \mu^- U^-(x) . \end{cases}$$

Además  $U(0) = u_*(1)$ ,  $V(0) = v_*(1)$ ,  $U(1) = v_*(0)$ ,  $V(1) = u_*(0)$ , y  $U'(0) = -u_*'(1)$ ,  $V'(0) = -v_*'(1)$ ,  $U'(1) = -u_*'(0)$ ,  $V'(1) = -v_*'(0)$ .

Con esto tenemos que  $U$  y  $V$  también satisfacen las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann que verifican  $u_*$  y  $v_*$ . Por tanto  $(U, V)$  es solución de (3.1) y esto implica que  $(U(x), V(x)) = (u_*(x), v_*(x))$ , es decir

$$(u_*(x), v_*(x)) = (u_*(1-x), v_*(1-x)) .$$

La demostración es análoga si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^-$ .

2° Ahora demostramos la periodicidad de las soluciones para el caso Neumann. Sea  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  con  $k$  impar y  $(u_*, v_*)$  la correspondiente solución no trivial de (3.1) para el caso Neumann. Por la simetría vista en la primera parte, tenemos

$$u'_*(\frac{1}{2}) = v'_*(\frac{1}{2}) = 0, \quad u_*(1) = u_*(0) \quad \text{y} \quad v_*(1) = v_*(0); \quad (6.8)$$

Más aún, ambas tienen  $(k-1)/2$  ceros en  $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ .

Definimos las funciones

$$\begin{aligned} (\tilde{u}, \tilde{v}) : [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{cases} (u_*(x), v_*(x)) & \text{para } x \in [0, 1] \\ (u_*(x-1), v_*(x-1)) & \text{para } x \in \langle 1, 2 \rangle, \end{cases} \\ w_1 = (u_1, v_1) : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (\tilde{u}(x + \frac{1}{2}), \tilde{v}(x + \frac{1}{2})) . \end{aligned}$$

Usando (6.8), tenemos

$$\begin{aligned} u'_1((\frac{1}{2})^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{u}(h+1) - \tilde{u}(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u_*(h+1) - u_*(1)}{h} = u'_*(1) = 0, \\ u'_1((\frac{1}{2})^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{u}(h+1) - \tilde{u}(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u_*(h) - u_*(0)}{h} = u'_*(0) = 0, \quad \text{y} \\ u'_1(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}(h + \frac{1}{2}) - \tilde{u}(\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_*(h + \frac{1}{2}) - u_*(\frac{1}{2})}{h} = u'_*(\frac{1}{2}) = 0, \end{aligned}$$

es decir  $u'_1(0) = u'_1(\frac{1}{2}) = 0$ . Análogamente se tiene  $v'_1(0) = v'_1(\frac{1}{2}) = 0$ , y con esto  $w_1 = (u_1, v_1)$  también es solución no trivial de (3.1). Como  $\tilde{u}'(\frac{1}{2}) = u'_1(0) = 0$ , del Lema 4.1 resulta  $\tilde{u}(\frac{1}{2})\tilde{v}(\frac{1}{2}) > 0$ . Entonces tenemos dos posibilidades:

a)  $(k-1)/2 \equiv 1 \pmod{2}$

Entonces el número de ceros en  $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$  es impar y como  $\tilde{u}(0), \tilde{v}(0) > 0$  resulta  $\tilde{u}(\frac{1}{2}) < 0$ ,  $\tilde{v}(\frac{1}{2}) < 0$ . Esto implica que  $w_1$  es una solución no trivial que empieza negativa y por ello  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^-$ .

b)  $(k-1)/2 \equiv 0 \pmod{2}$

Entonces el número de ceros en  $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$  es par y como  $\tilde{u}(0), \tilde{v}(0) > 0$  se tiene que  $\tilde{u}(\frac{1}{2}) > 0, \tilde{v}(\frac{1}{2}) > 0$ . Ahora consideramos las nuevas funciones

$$(U(x), V(x)) = (\tilde{u}(\frac{3}{2} - x), \tilde{v}(\frac{3}{2} - x)), \quad x \in [0, 1].$$

Se observa que  $U$  y  $V$  empiezan positivas y tienen  $(k-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ . Por ejemplo, si  $r_i \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$  es cero de  $u_*$  entonces  $(\frac{1}{2} - r_i)$  es cero de  $U$  y si  $r_i \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$  es cero de  $u_*$  entonces  $(\frac{3}{2} - r_i)$  es cero de  $U$ ; recíprocamente, si  $r_i \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$  es cero de  $U$  entonces  $(\frac{1}{2} - r_i)$  es cero de  $u_*$  y si  $r_i \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$  es cero de  $U$  entonces  $(\frac{3}{2} - r_i)$  es cero de  $u_*$ . Además, se verifica que  $U$  y  $V$  son soluciones no triviales correspondientes a  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$  al igual que  $(u_*(x), v_*(x))$ . Por ello

$$(u_*, v_*)(\frac{1}{2} - x) = (u_*, v_*)(x), \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Esto implica que

$$u'_*(\frac{1}{4}) = v'_*(\frac{1}{4}) = 0, \quad u_*(\frac{1}{2}) = u_*(0) \quad \text{y} \quad v_*(\frac{1}{2}) = v_*(0) \quad (6.9)$$

y ambas tienen  $(k-1)/4$  ceros en  $\langle 0, \frac{1}{4} \rangle$ .

Con esto repetimos el argumento usando la función

$$\begin{aligned} w_2 = (u_2, v_2) : [0, \frac{1}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (\tilde{u}(x + \frac{1}{4}), \tilde{v}(x + \frac{1}{4})) \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$(u_*, v_*)(\frac{1}{4} - x) = (u_*, v_*)(x), \quad \forall x \in [0, \frac{1}{4}].$$

El proceso continúa dividiendo el intervalo, hasta llegar a  $[0, (\frac{1}{2})^j]$  con  $j$  verificando  $k \equiv 1 \pmod{2^{j+1}}$ , es decir  $(k-1)/2^j \equiv 0 \pmod{2}$ . Entonces estamos en el caso b) y así demostramos

$$(u_*, v_*)((\frac{1}{2})^j - x) = (u_*, v_*)(x), \quad \forall x \in [0, (\frac{1}{2})^j].$$

Finalmente, reemplazando  $(\frac{1}{2})^j - x$  por  $x$  en la relación

$$(u_*, v_*)((\frac{1}{2})^{j-1} - x) = (u_*, v_*)(x), \quad \forall x \in [0, (\frac{1}{2})^{j-1}],$$

se obtiene

$$(u_*, v_*)((\frac{1}{2})^j + x) = (u_*, v_*)(x), \quad \forall x \in [0, (\frac{1}{2})^j],$$

es decir,  $u_*, v_*$  son  $(1/2)^j$  periódicas. ■

En el siguiente resultado establecemos que las superficies de Fucik  $\widehat{\Sigma}_k^+$  y  $\widehat{\Sigma}_k^-$  pueden o no coincidir.

**Proposición 6.3** *Se satisfacen los siguientes enunciados:*

1- Para el problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet:

- i)  $\widehat{\Sigma}_k^+ \equiv \widehat{\Sigma}_k^-$  para todo par  $k \geq 2$
- ii)  $\widehat{\Sigma}_k^+ \not\equiv \widehat{\Sigma}_k^-$  para todo impar  $k \geq 3$ .

2- Para el problema con condiciones de frontera tipo Neumann:

$$\widehat{\Sigma}_k^+ \equiv \widehat{\Sigma}_k^- \text{ para todo } k \geq 2.$$

**Demostración.-**

1- Sea  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  y  $(u_*, v_*)$  la correspondiente solución no trivial de (3.1) con condiciones de frontera tipo Dirichlet. Entonces se verifica

$$\begin{aligned} -\frac{u_*''}{u_*'(0)} &= \lambda^+ \frac{v_*^+}{u_*'(0)} - \lambda^- \frac{v_*^-}{u_*'(0)} \\ -\frac{v_*''}{u_*'(0)} &= \lambda^+ \frac{u_*^+}{u_*'(0)} - \mu^- \frac{u_*^-}{u_*'(0)} \\ \left(\frac{u_*}{u_*'(0)}, \frac{v_*}{u_*'(0)}, \frac{u_*'}{u_*'(0)}, \frac{v_*'}{u_*'(0)}\right)(0) &= (0, 0, 1, \frac{v_*'(0)}{u_*'(0)}) \quad \text{y} \quad \left(\frac{u_*}{u_*'(0)}, \frac{v_*}{u_*'(0)}\right)(1) = (0, 0), \\ \text{es decir } (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, \frac{v_*'(0)}{u_*'(0)}) &\in \widetilde{\Sigma}_k^+. \end{aligned}$$

i) Si  $k$  es par:

Observamos que al tener  $(k-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $u_*$  y  $v_*$  cambian de signo un número impar de veces y por ello ambas empiezan positivas y terminan negativas. Definimos  $(U, V)(x) = (u_*(1-x), v_*(1-x))$  y observamos que  $U$  y  $V$  empiezan negativas y terminan positivas, y que también tienen  $(k-1)$  ceros. Análogamente a lo desarrollado en la primera parte de la demostración de la Proposición 6.2, tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{U''}{u_*'(1)} &= \lambda^+ \frac{V^+}{u_*'(1)} - \lambda^- \frac{V^-}{u_*'(1)} \\ -\frac{V''}{u_*'(1)} &= \lambda^+ \frac{U^+}{u_*'(1)} - \mu^- \frac{U^-}{u_*'(1)} \\ \left(\frac{U}{u_*'(1)}, \frac{V}{u_*'(1)}, \frac{U'}{u_*'(1)}, \frac{V'}{u_*'(1)}\right)(0) &= (0, 0, -1, -\frac{v_*'(1)}{u_*'(1)}) \quad \text{y} \\ \left(\frac{U}{u_*'(1)}, \frac{V}{u_*'(1)}\right)(1) &= (0, 0), \end{aligned}$$

es decir,  $(\frac{U}{u'_*(1)}, \frac{V}{u'_*(1)})$  es solución no trivial de (3.1) con coeficientes  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$ . Más aún,  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \tilde{\Sigma}_k^-$  con  $s = -\frac{v'_*(1)}{u'_*(1)}$ . Esto implica que  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \hat{\Sigma}_k^-$  y así tenemos  $\hat{\Sigma}_k^+ \subset \hat{\Sigma}_k^-$ . Análogamente se demuestra  $\hat{\Sigma}_k^- \subset \hat{\Sigma}_k^+$ . Por tanto,  $\hat{\Sigma}_k^+ \equiv \hat{\Sigma}_k^-$ .

ii) Si  $k$  es impar:

Veremos que la ecuación (5.10) toma valores diferentes en una vecindad de  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$ . En efecto, sea  $\phi_k$  la autofunción normalizada correspondiente al autovalor  $\lambda_k = k^2\pi^2$ . Si  $\phi_k$  empieza y termina positiva:

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x & , \quad x \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \\ -\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi \left(x - \frac{1}{k}\right) & , \quad x \in \left\langle \frac{1}{k}, \frac{2}{k} \right] \\ \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi \left(x - \frac{2}{k}\right) & , \quad x \in \left\langle \frac{2}{k}, \frac{3}{k} \right] \\ -\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi \left(x - \frac{3}{k}\right) & , \quad x \in \left\langle \frac{3}{k}, \frac{4}{k} \right] \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi \left(x - \frac{k-1}{k}\right) & , \quad x \in \left\langle \frac{k-1}{k}, 1 \right] \end{cases} \quad (6.10)$$

entonces

$$\int_0^1 (\phi_k^-)^2 dx = \frac{k-1}{2k} \quad \text{y} \quad \int_0^1 (\phi_k^+)^2 dx = \frac{k+1}{2k}. \quad (6.11)$$

Y si  $\phi_k$  empieza y termina negativa:

$$\phi_k(x) = \begin{cases} -\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x & , \quad x \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \\ \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi \left(x - \frac{1}{k}\right) & , \quad x \in \left\langle \frac{1}{k}, \frac{2}{k} \right] \\ -\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi \left(x - \frac{2}{k}\right) & , \quad x \in \left\langle \frac{2}{k}, \frac{3}{k} \right] \\ \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi \left(x - \frac{3}{k}\right) & , \quad x \in \left\langle \frac{3}{k}, \frac{4}{k} \right] \\ \vdots & \vdots \\ -\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi \left(x - \frac{k-1}{k}\right) & , \quad x \in \left\langle \frac{k-1}{k}, 1 \right] \end{cases} \quad (6.12)$$

entonces

$$\int_0^1 (\phi_k^-)^2 dx = \frac{k+1}{2k} \quad \text{y} \quad \int_0^1 (\phi_k^+)^2 dx = \frac{k-1}{2k} . \quad (6.13)$$

De la ecuación (5.10), tenemos

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_k, \lambda_k) = - \frac{\int_0^1 (\phi_k^-)^2 dx}{2 \int_0^1 (\phi_k^+)^2 dx} ,$$

pero usando (6.11) y (6.13) tenemos que si  $\phi_k$  empieza y termina positiva

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_k, \lambda_k) = - \frac{k-1}{2(k+1)} ,$$

mientras que si  $\phi_k$  empieza y termina negativa

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\lambda_k, \lambda_k) = - \frac{k+1}{2(k-1)} .$$

Al ser estos números diferentes, deducimos que  $\widehat{\Sigma}_k^+$  y  $\widehat{\Sigma}_k^-$  son diferentes en una vecindad de  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$  y en consecuencia  $\widehat{\Sigma}_k^+ \neq \widehat{\Sigma}_k^-$ .

- 2- Ahora veamos el caso Neumann. Sea  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  y  $(u_*, v_*)$  la correspondiente solución no trivial de (3.1) con derivada nula en la frontera. Entonces

$$\begin{aligned} -\frac{u_*''}{u_*(0)} &= \lambda^+ \frac{v_*^+}{u_*(0)} - \lambda^- \frac{v_*^-}{u_*(0)} \\ -\frac{v_*''}{u_*(0)} &= \lambda^+ \frac{u_*^+}{u_*(0)} - \mu^- \frac{u_*^-}{u_*(0)} \\ \left( \frac{u_*}{u_*(0)}, \frac{v_*}{u_*(0)}, \frac{u_*'}{u_*(0)}, \frac{v_*'}{u_*(0)} \right)(0) &= \left( 1, \frac{v_*(0)}{u_*(0)}, 0, 0 \right) \text{ y } \left( \frac{u_*'}{u_*(0)}, \frac{v_*'}{u_*(0)} \right)(1) = (0, 0) , \end{aligned}$$

así  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, \frac{v_*(0)}{u_*(0)}) \in \widetilde{\Sigma}_k^+$ .

i) Si  $k$  es par:

La prueba es similar al caso Dirichlet. Las funciones  $u_*$  y  $v_*$  cambian de signo un número impar de veces, empiezan positivas y terminan negativas. Definiendo  $(U, V)(x) = (u_*(1-x), v_*(1-x))$  vemos que  $U$  y  $V$  empiezan

negativas y terminan positivas, y tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{U''}{-u_*(1)} &= \lambda^+ \frac{V^+}{-u_*(1)} - \lambda^- \frac{V^-}{-u_*(1)} \\ -\frac{V''}{-u_*(1)} &= \lambda^+ \frac{U^+}{-u_*(1)} - \mu^- \frac{U^-}{u'_*(1)} \\ \left( \frac{U}{-u_*(1)}, \frac{V}{-u_*(1)}, \frac{U'}{-u_*(1)}, \frac{V'}{-u_*(1)} \right)(0) &= (-1, -\frac{v_*(1)}{u'_*(1)}, 0, 0) \quad y \\ \left( \frac{U'}{-u_*(1)}, \frac{V'}{-u_*(1)} \right)(1) &= (0, 0), \end{aligned}$$

es decir,  $(\frac{U}{-u_*(1)}, \frac{V}{-u_*(1)})$  es solución no trivial de (3.1) con condiciones de frontera tipo Neumann y coeficientes  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$ . Más aún,  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \tilde{\Sigma}_k^-$  con  $s = -\frac{v_*(1)}{u'_*(1)}$ . Esto implica que  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \hat{\Sigma}_k^-$  y así tenemos  $\hat{\Sigma}_k^+ \subset \hat{\Sigma}_k^-$ . La otra inclusión se prueba análogamente partiendo de  $\hat{\Sigma}_k^-$ . Por tanto,  $\hat{\Sigma}_k^+ \equiv \hat{\Sigma}_k^-$ .

ii) Si  $k$  es impar:

Las funciones  $u_*$  y  $v_*$  empiezan y terminan positivas. Llamamos  $n$  al máximo entero positivo tal que  $k \equiv 1 \pmod{2^n}$ , observando que  $n \geq 1$  pues  $k \equiv 1 \pmod{2^1}$ . Por la Proposición 6.2 tenemos que

$$(u_*, v_*)(x) = (u_*, v_*)((\frac{1}{2})^{n-1} - x), \quad \forall x \in [0, (\frac{1}{2})^{n-1}].$$

Entonces

$$u'_*(\frac{1}{2^n}) = v'_*(\frac{1}{2^n}) = 0, \quad u_*(\frac{1}{2^{n-1}}) = u_*(0) \quad y \quad v_*(\frac{1}{2^{n-1}}) = v_*(0),$$

más aún,  $u_*$  y  $v_*$  tienen  $(k-1)/2^n$  ceros en  $\langle 0, \frac{1}{2^n} \rangle$ .

Definimos

$$\begin{aligned} w_n = (u_n, v_n) : [0, (\frac{1}{2})^{n-1}] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (\tilde{u}(x + \frac{1}{2^n}), \tilde{v}(x + \frac{1}{2^n})), \end{aligned}$$

donde  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  es la función definida en la prueba de la Proposición 6.2. Como el número de ceros  $(k-1)/2^n$  es impar,  $\tilde{u}(0) > 0$  y  $u'_*(\frac{1}{2^n}) = 0$ , por el Lema 4.1 tenemos que  $\tilde{u}(\frac{1}{2^n}), \tilde{u}(\frac{1}{2^n}) < 0$ . Luego  $w_n$  tiene  $(k-1)/2^n$  ceros en  $\langle 0, \frac{1}{2^n} \rangle$ , es decir  $(k-1)$  ceros en  $\langle 0, 1 \rangle$ , también es solución del problema (3.1) tipo Neumann con coeficientes  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-)$  y empieza con valor negativo  $w_n(0) = \tilde{u}(\frac{1}{2^n}) < 0$ . Todo esto implica que  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \hat{\Sigma}_k^-$ , con lo cual tenemos  $\hat{\Sigma}_k^+ \subset \hat{\Sigma}_k^-$ . Análogamente se demuestra  $\hat{\Sigma}_k^- \subset \hat{\Sigma}_k^+$  y con ello  $\hat{\Sigma}_k^+ \equiv \hat{\Sigma}_k^-$ . ■



Terminamos este trabajo, exhibiendo una curva en  $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cap \widehat{\Sigma}_k^-)$ .

**Proposición 6.4** *La intersección de superficies de Fucik  $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cap \widehat{\Sigma}_k^-)$  contiene una curva no acotada que pasa por  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$ ; más aún, este es el único punto en  $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cap \widehat{\Sigma}_k^-)$  con  $\lambda^- = \mu^-$ .*

**Demostración.-** Primero observamos que usando las dos simetrías del Lema 3.3, obtenemos que si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  con correspondiente solución no trivial  $(u, v)$  y  $\lambda^+ = \sqrt{\lambda^- \mu^-}$ , entonces  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$  con correspondiente solución no trivial  $(-\sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}} v, -u)$ , y por tanto pertenece a  $\widehat{\Sigma}_k^-$ . Esto demuestra que los puntos de la forma  $(\sqrt{\lambda^- \mu^-}, \lambda^-, \mu^-)$  pertenecen a  $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cap \widehat{\Sigma}_k^-)$ .

Ahora, para  $\xi > 0$  consideramos la semirrecta  $L_\xi = \{(\lambda^-, \mu^-) : \lambda^- = \xi \mu^- > 0\}$  y, procediendo como en la prueba de la tercera parte de la Proposición 5.1, tenemos que existe un único  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  tal que  $\lambda^- = \xi \mu^-$  y  $\lambda^+ = \sqrt{\lambda^- \mu^-}$ . Así,  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) = (\sqrt{\xi} \mu^-, \xi \mu^-, \mu^-)$ .

Por continuidad, esto nos da una curva en  $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cap \widehat{\Sigma}_k^-)$  parametrizada por  $\xi$ , la cual haciendo  $\xi = 1$  pasa por  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$ . La unicidad de este punto se obtiene inmediatamente de la Proposición 5.3. ■

# Capítulo 7

## Conclusiones

En nuestro estudio del Espectro de Fucik  $\widehat{\Sigma}$  para el sistema acoplado con valores en la frontera

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases} \quad (7.1)$$

hemos obtenido resultados que dan propiedades del espectro  $\widehat{\Sigma}$  y de las soluciones no triviales  $(u, v)$  del problema dado. Resaltamos los siguientes resultados:

1. Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_t$ , entonces
  - en el caso Dirichlet:  $\lambda^+ = \lambda_1 \vee \lambda^- \mu^- = \lambda_1^2$ . El plano  $\lambda^+ = \lambda_1$  corresponde a las soluciones  $u = v = k \phi_1$ ,  $k > 0$ , y la superficie  $\lambda^- \mu^- = \lambda_1^2$  corresponde a las soluciones  $u = \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}} v = -k \phi_1$ ,  $k > 0$ .
  - en el caso Neumann:  $\lambda^+ = 0 \vee \lambda^- = 0 \vee \mu^- = 0$ . El plano  $\lambda^+ = 0$  corresponde a las soluciones  $(u = k_1 \phi_1, v = k_2 \phi_1, k_1, k_2 \geq 0)$ , el plano  $\lambda^- = 0$  corresponde a las soluciones  $(u = 0, v = k \phi_1, k < 0)$  y el plano  $\mu^- = 0$  corresponde a las soluciones  $(u = k \phi_1, k < 0, v = 0)$ .
2. Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ , entonces  $\lambda^+ > \lambda_1$  y  $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_1$ .
3. Si  $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_{escal}$  con  $\lambda^+, \lambda^- > \lambda_1$  y  $u$  es solución del problema (2.1), entonces  $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$  con correspondiente solución  $(u, u)$  de (7.1).
4. Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$  y  $(u, v)$  es la correspondiente solución no trivial del problema (7.1), entonces  $u$  y  $v$  tienen el mismo número de ceros, todos simples, y tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1.

5. Para todo punto  $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \mathbb{R}^3$ , con  $k \geq 2$ , pasan dos superficies en  $\widehat{\Sigma}$ .
6. Cada superficie  $\widehat{\Sigma}_k^+$ ,  $\widehat{\Sigma}_k^-$  es caracterizada por el número de ceros interiores  $(k-1)$  de las correspondientes soluciones no triviales y por su signo en una vecindad de cero.
7. Si  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ , entonces  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^+$  o  $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_k^-$ , para algún  $k \geq 2$ .
8. Las superficies correspondientes a diferentes valores de  $k$  son disjuntas.
9. Estas superficies pueden ser representadas expresando la variable  $\lambda^+$  como función de las otras dos variables, y son monótonas decrecientes en las dos variables y no acotadas en las tres direcciones.
10. Las soluciones no triviales correspondientes a puntos en  $\widehat{\Sigma}_k^+$  o  $\widehat{\Sigma}_k^-$  con  $k$  impar son simétricas en el sentido  $(u, v)(x) = (u, v)(1-x)$ .

Finalmente, mencionamos que en el desarrollo del trabajo, usando algunas de estas propiedades hemos calculado puntos y familias de puntos del espectro  $\widehat{\Sigma}$  y hemos calculado y construido las respectivas soluciones y familias de soluciones no triviales  $(u, v)$  del problema (7.1). Por ejemplo: para todo  $r > 1$ ,

$$\left( r^2\pi^2, \frac{r^2\pi^2}{(r-1)^2}, \frac{r^2\pi^2}{(r-1)^2} \right) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$$

con correspondiente solución  $(u_r, u_r)$  de (7.1) para el caso Dirichlet, donde

$$u_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{r-1} \operatorname{sen} r\pi t & , \quad t \in \left[ 0, \frac{1}{r} \right] \\ -\operatorname{sen} \frac{r\pi}{r-1} \left( t - \frac{1}{r} \right) & , \quad t \in \left\langle \frac{1}{r}, 1 \right] \end{cases}.$$

# Bibliografía

- [1] Adams R. y Fournier J. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Elsevier Ltd. (2003)
- [2] Brezis H. *Analyse Fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris (1983), Théorie et applications.
- [3] Campos J. y Dancer E. N. *On the resonance set in a fourth-order equation with jumping nonlinearity*. Differential Integral Equations 14(3) (2001), 257-272.
- [4] Coddington E. A. y Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Publishing Co. Ltd. (1987).
- [5] Dancer E. N. *Boundary value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations*. Bull. Austral. Math. Soc. 15 (1976), 321-328.
- [6] Dancer E. N. y Du Y. H. *Competing species equations with diffusion, large interactions and jumping nonlinearities*. J. Differential Equations 114 (1994), n° 2, 434-475.
- [7] De Figueiredo D. G. y Gossez J. P. *On the first curve of the Fucik spectrum of an elliptic operator*. Differential Integral Equations 7 (1994), 1285-1302.
- [8] Dong Y. *On the solvability of asymptotically positively homogeneous equations with Sturm-Liouville boundary value conditions*. Nonlinear Anal. 42 (2000), 1351-1363.
- [9] Drabek P. *Solvability and bifurcation of Nonlinear equations*. U. K. Longman Scientific and Technical, J. Wiley & Sons Inc, New York, (1992).
- [10] Evans L. C. *Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, vol 19*. American Mathematical Society, Providence, RI, (1998).
- [11] Fabry C. *Landesman-Lazer conditions for periodic boundary value problem with asymmetric nonlinearities*. J. Differential Equations 116 (1995), 405-418.

- [12] Fabry C. y Habets P. *Periodic solutions of second order differential equations with superlinear asymmetric nonlinearities*. Arch. Math. 60 (1993), 266-276.
- [13] Fucik S. *Boundary value problem with jumping nonlinearities*. Casopis Pest. Mat 101 (1) (1976), 69-87.
- [14] Fucik S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1980).
- [15] Fucik S. y Kufner A. *Nonlinear Differential Equations*. Elsevier Scientific Publishing Company, (1980).
- [16] Gallouet T. y Kavian O. *Résultats d'existence et de non-existence pour certains problèmes demi-linéaires á l'infini*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) 3 (3-4) (1981) 201-246.
- [17] Glover J., Lazer C. y McKenna P. J. *Existence and stability of large scale nonlinear oscillations in suspension bridges*. Z. Angew. Math. Phys. 40 (1989) n° 2, 172-200.
- [18] Krejci P. *On solvability of equations of the 4th order with jumping nonlinearities*. Casopis Pest. Mat 108 (1983), 29-39.
- [19] Lazer C. y McKenna P. J. *Nonlinear periodic flexing in a floating beam*. J. Comput. Appl Math. 52 (1994), n° 1-3, 287-303.
- [20] Massa E. *On a variational characterization of the Fucik Spectrum of the Laplacian and a superlinear Sturm-Liouville equation*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A 134(3) (2004), 557-577.
- [21] Massa E. *An existence result for a linear-superlinear elliptic system with Neumann boundary conditions*. J. Math. Anal. Appl. 322 (1) (2006) 403-419.
- [22] Massa E. *On the Fucik Spectrum and superlinear elliptic equations*. PhD. Thesis, Università degli Studi di Milano, Italy) (2003).
- [23] Massa E. y Ruf B. *A Global Characterization of the Fucik Spectrum for a System of Ordinary Differential Equations*. J. Differential Equations 234 (2007), 311-336.

- [24] McKenna P. J. y Moore K. S. *Mathematics arising from suspension bridge dynamics: recent developments*. Jahresber. Deutsch. Math. Verein 101 (1999) n° 4, 178-195.
- [25] Pope P. J. *Solvability of non self-adjoint and higher order differential equations with jumping nonlinearities*. PhD Thesis, University of New England, Australia, (1984).
- [26] Rojas S. *Espectro de Fucik para el problema de valor frontera Sturm-Liouville*. Pesquimat, revista de investigación de la Fac. Ciencias Mat. UNMSM Vol IX, n°. 2 (2006), 31-49.
- [27] Ruf B. *On nonlinear elliptic problems with jumping nonlinearities*. Ann. Mat. Pure Appl. (4) 128 (1981) 133-151.
- [28] Rynne B. P. *The Fucik Spectrum of general Sturm-Liouville problems*. J. Differential Equations 161 (2000), 87-109.
- [29] Rynne B. P. *Non resonance conditions for semilinear Sturm-Liouville problems with jumping nonlinearities*. J. Differential Equations 170 (2001), 215-227.
- [30] Spivak M. *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, (1965).